2.4 Bezugssysteme

Die Wahl von Ortskoordinaten $\vec{r} = (x, y, z)^T$ und einer Zeitkoordinate t definiert ein Bezugssystem Σ.

Der Wechsel in ein Bezugssystem Σ' mit Koordinaten x', y', z', t' wird beschrieben durch eine Transformation

$$\begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} t' \\ \vec{r}\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0(t, \vec{r}) \\ \vec{f}(t, \vec{r}) \end{pmatrix} \tag{152}$$

mit —zunächst beliebigen— (hinreichend oft differenzierbaren) Funktionen f_0, f_1, f_2, f_3. Ein (oft unausgesprochenes) Axiom der Newtonschen Mechanik ist der Glaube an eine absolute Zeit, die von Bewegungen (und allen physikalischen Abläufen) unbeeinflusst verläuft. Dieser Geist beschränkt f_0 auf die Form:

$$t' \;=\; f_0(t) \;= t + t_0 \tag{153}$$

$\uparrow$

Verschiebung des Zeitnullpunkts, z.B. zwischen der Westeuropäischen Zeit (Greenwich-Zeit) und der Mitteleuropäischen Zeit (MEZ)

Ein Bezugssystem, in dem jede kräftefreie Bewegung geradlinig-gleichförmig ist, also durch

$$\vec{r}(t) \;= \vec{v}\,t \;+\; \vec{r}_0 \qquad \text{mit } \vec{v} = \text{const. und } \vec{r}_0 = \text{const.} \tag{154}$$

beschrieben wird, heißt Inertialsystem (von „inert“ = träge). Eine Transformation, die ein Inertialsystem in eine anderes überführt und Gl. (153) erfüllt, heißt Galilei-Transformation (GT). Für Galilei-Transformationen gilt

$$t' \;= t + t_0 \tag{155a}$$

$$\vec{r}\,'(t') \;= \vec{f}(\vec{r}, t) \;=\; S(\phi)\vec{r} + \vec{w}t + \vec{a} \tag{155b}$$

mit zeitunabhängigen $S(\vec{\phi})$, $\vec{w}$, $\vec{a}$ und $S^T(\vec{\phi})\, S(\vec{\phi}) = \mathbb{1}$. Ist zusätzlich $\det S(\vec{\phi}) = 1$, $S(\vec{\phi})$ also Drehmatrix, so spricht man von einer <u>eigentlichen</u> (oder <u>orthochoren</u>) GT.

Mit Gl. (155) finden wir im Bezugssystem Σ' für unsere geradlinig-gleichförmige Bewegung:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t') &= S(\vec{\phi})\ (\vec{v}t + \vec{r}_0) + \vec{w}t + \vec{a} \\ &= \left[S(\vec{\phi})\vec{v} + \vec{w}\right] t\ +\ S(\vec{\phi})\vec{r}_0 + \vec{a} \\ &\overset{(153)}{=} \underbrace{\left[S(\vec{\phi})\vec{v} + \vec{w}\right]}_{=\vec{v}\,'} t'\ +\ \underbrace{S(\vec{\phi})\ (\vec{r}_0 - \vec{v}t_0)\ -\ \vec{w}t_0\ +\ \vec{a}}_{=\vec{r}\,'_0} \end{aligned} \tag{156}$$

D.h. die Bewegung in Gl. (156) ist geradlinig-gleichförmig mit

$$\vec{v}\,' = S(\vec{\phi})\vec{v} \quad + \quad \vec{w}$$

$\uparrow$ $\nwarrow$

Drehung (bzw. Drehspiegelung) der Koordinatensysteme gegeneinander

Relativgeschwindigkeit von Σ' bzgl. Σ

$$\vec{r}\,'_0 = S(\vec{\phi})\,(\vec{r}_0 - \vec{v}t_0)\ -\ \vec{w}t_0\ +\ \vec{a}$$

$\nearrow$

Versatz der Ursprünge von Σ und Σ'

Die umgekehrte Beweisrichtung, also dass aus der Forderung $\vec{r}\,' = \vec{v}\,'t' + \vec{r}\,'_0$ (mit Gl. (153)) für jede Wahl $(\vec{v}, \vec{r})$ zwingend Gl. (155) folgt, findet man z.B. in *Scheck, Mechanik,* Kap. 1.12.

Eine eigentliche GT wird durch 10 reelle Parameter beschrieben:

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, w_1, w_2, w_3, a_1, a_2, a_3, t_0$$

Alle Inertialsysteme sind „gleichberechtigt“, d.h. die Newtonschen Gesetze haben die gleiche Form. D.h. man darf behaupten dass sich der Zug, in dem man sitzt, in Ruhe befindet und sich der Bahnsteig mit Geschwindigkeit $-\vec{v}$ bewegt!

Matrix-Schreibweise von Gl. (155):

$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{r}\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\;0\;0 \\ \underbrace{\vec{w}} & \underbrace{S(\vec{\phi})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ \vec{a} \end{pmatrix}$$

$$4 \times 1\text{-Untermatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \qquad 4 \times 3\text{-Untermatrix} \begin{pmatrix} 0\;0\;0 \\ S(\vec{\phi}) \end{pmatrix}$$

$$=: G(\vec{\phi}, \vec{w}) \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ \vec{a} \end{pmatrix} \tag{157}$$

Verkettung zweier GT mit $G_1 := G(\vec{\phi}_1, \vec{w}_1)$ und $\vec{a}_1$ sowie $G_2 := G(\vec{\phi}_2, \vec{w}_2)$ uns $\vec{a}_2$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t'' \\ \vec{r}\,'' \end{pmatrix} &= G_2 \begin{pmatrix} t' \\ \vec{r}\,' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{02} \\ \vec{a}_2 \end{pmatrix} \\ &= G_2 \left[G_1 \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{01} \\ \vec{a}_1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} t_{02} \\ \vec{a}_2 \end{pmatrix} \\ &= G(\vec{\phi}, \vec{w}) \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ \vec{a} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{158}$$

Durch Ausmultiplizieren von $G_2 G_1 = G$ findet man $\vec{w}$ und die Matrix $S(\vec{\phi})$ in G. Aus Gl. (158) liest man außerdem ab:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t_0 \\ \vec{a} \end{pmatrix} &= G_2 \begin{pmatrix} t_{01} \\ \vec{a}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{02} \\ \vec{a}_2 \end{pmatrix} \\ &\overset{(157)}{=} \begin{pmatrix} t_{01} + t_{02} \\ \vec{w}_2 t_{01} + S(\vec{\phi}_2)\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{159}$$