Rotierende Bezugssysteme Σ sei ein Inertialsystem („raumfestes Bezugssystem“), Σ' drehe sich bzgl. Σ um eine Achse $\vec{n}$. Ist Σ' mit einem rotierenden Körper verbunden (d.h. die Koordinatenachsen sind auf diesem Körper eingezeichnet), so spricht man von einem „körperfestes Bezugssystem“. Dabei wählen wir Ursprung und Orientierung der Koordinatenachsen von Σ so, dass zu einem Zeitpunkt t_0 die Koordinatenachsen der beiden Bezugssysteme zusammenfallen.
Beispiele: rotierende Scheibe, Erde.

$$\vec{\omega} := \frac{d\vec{\phi}}{dt} = \dot{\vec{\phi}}, \tag{160}$$

das nicht mit dem Vektor aus 3×3-Matrizen in Gl. (160) verwechselt werden darf, heißt <u>Winkelgeschwindigkeit</u>. $\vec{\omega}$ ist völlig beliebig und darf von t abhängen.

$$t' = t \tag{161a}$$

$$\vec{r}\,' = R(\vec{\phi}(t))\vec{r} \tag{161b}$$

Ziel: Bewegungen zwischen Σ und Σ' umrechnen.

$$\begin{aligned} \vec{v}\,' &= \frac{d\vec{r}\,'}{dt'} = \dot{\vec{r}}\,', \\ &= \frac{d}{dt}\left[R(\phi(t))\vec{r}\right] = \overbrace{\sum_{j=1}^{3} \dot{\phi}_j \frac{\partial R(\vec{\phi}(t))}{\partial \phi_j}}^{\underbrace{\dot{R}(\phi(t))}} \vec{r} + R(\vec{\phi}(t))\,\dot{\vec{r}} \end{aligned} \tag{162}$$

Zur Berechnung von $\frac{\partial R}{\partial \phi_j}$ wählen wir den Nullpunkt von ϕ gerade so, dass der betrachtete Zeitpunkt t gerade dem Punkt t_0 entspricht, zu dem $\phi(t) = 0$

und $\vec{r}\,'(t) = \vec{r}(t)$ ist. Σ heißt dann <u>instantanes</u> Inertialsystem. Die einzige Eigenschaft von Σ, die wir nutzen werden, ist die Gültigkeit der Newtonschen Gesetze, die Bewegungsgleichung wird dagegen in Σ' gelöst werden.

Entwicklung von $R = R(\vec{\phi})$ in Gl. (128):

$$\left[R(\vec{\phi})\right]_{kl} = \delta_{kl} + \sum_{m=1}^{3} \epsilon_{klm}\phi_m + \mathcal{O}(\phi_n^2) \tag{163}$$

Für beliebige Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ finden wir

$$\sum_{j=1}^{3} c_j \left[\frac{\partial R}{\partial \phi_j}\vec{b}\right]_k = \sum_{j,l=1}^{3} c_j \left[\frac{\partial R}{\partial \phi_j}\right]_{kl} b_l \overset{(163)}{=} \sum_{j,l=1}^{3} c_j \epsilon_{klj} b_l = -\left[\vec{c}\times\vec{b}\right]_k . \tag{164}$$

Also mit $c_j = \dot{\phi}_j = \omega_j$:

$$\dot{R}\vec{b} = \sum_{j=1}^{3} \dot{\phi}_j \frac{\partial R}{\partial \phi_j}\vec{b} = -\vec{\omega}\times\vec{b}. \tag{165}$$

Einsetzen in Gl. (162) mit Gl. (163) (und $\vec{b} = \vec{r}$):

$$\dot{\vec{r}}\,' = \dot{\vec{r}} - \vec{\omega}\times\vec{r} \tag{166a}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}\,' \tag{166b}$$

Für den gewählten Zeitpunkt t ist $R(\vec{\phi}(t)) = \mathbb{1}$, aber $\dot{R}(\vec{\phi}(t)) \neq 0$! Eine schrecklich unpräzise, aber dennoch häufig verwendete Kurzschreibweise ist

$$\frac{d}{dt}\Big|_{\text{Raum}} = \frac{d}{dt}\Big|_{\text{Körper}} + \vec{\omega}\times$$

Beschleunigung:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}\,' &= \frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}\,' \overset{(162)}{=} \frac{d}{dt}\left(\dot{R}\vec{r} + R\dot{\vec{r}}\right)\\ &= \ddot{R}\vec{r} + 2\dot{R}\dot{\vec{r}} + R\ddot{\vec{r}}\end{aligned} \tag{167}$$

Für $\ddot{R}$ müssen wir Gl. (128) zur zweiten Ordnung entwickeln:

$$
\begin{aligned}
\ddot{R}_{kl} &= \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{3}\dot{\phi}_j\frac{\partial R_{kl}}{\partial \phi_j} = \sum_{j=1}^{3}\ddot{\phi}_j\frac{\partial R_{kl}}{\partial \phi_j} + \sum_{j,m=1}^{3}\dot{\phi}_j\dot{\phi}_m\frac{\partial^2 R_{kl}}{\partial\phi_j\partial\phi_m} \\
&\overset{(128)}{=} \sum_{j=1}^{3}\ddot{\phi}_j\frac{\partial R_{kl}}{\partial \phi_j} + \sum_{j,m=1}^{3}\dot{\phi}_j\dot{\phi}_m\left[-\delta_{kl}\delta_{jm} + \frac{1}{2}\delta_{lm}\delta_{jk} + \frac{1}{2}\delta_{km}\delta_{lj}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{3}\ddot{\phi}_j\frac{\partial R_{kl}}{\partial \phi_j} - \delta_{kl}\dot{\vec{\phi}}^{\,2} + \dot{\phi}_k\dot{\phi}_l
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\ddot{R}\vec{r}\right]_k &= \sum_{l=1}^{3}\ddot{R}_{kl}x_l \overset{(164)}{=} -\left[\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\right]_k - \vec{\omega}^{\,2}x_k + (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\,\omega_k \\
\Rightarrow \qquad \ddot{R}\vec{r} &= -\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} - \vec{\omega}^{\,2}\vec{r} + (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\,\vec{\omega}
\end{aligned}
$$

Wir nutzen

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

um $\ddot{R}\vec{r}$ umzuschreiben in

$$\ddot{R}\vec{r} = -\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\,. \tag{168}$$

Einsetzen von Gl. (166) und (168) in Gl. (167) (und Verwenden von $R(\vec{\phi}(t)) = \mathbb{1}$) liefert:

$$\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}} - 2\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} \tag{169}$$

Schließlich mit Gl. (166b), $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$:

$$\underset{\text{In }\Sigma'\text{ beobachtete Beschleunigung}}{\ddot{\vec{r}}'} = \underset{\text{Beschleunigung im Inertialsystem }\Sigma}{\ddot{\vec{r}}} \underbrace{-\,2\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis-Beschleunigung }\vec{a}_C} \underbrace{-\,\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right)}_{\text{Zentrifugalbeschleunigung }\vec{a}_Z} - \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,' \tag{170}$$

Entsprechend heißen $m\vec{a}_C$ und $m\vec{a}_Z$ Corioliskraft und Zentrifugalkraft. Man spricht oft von Scheinkräften, weil sie in Inertialsystemen nicht auftreten.

Wichtige Anwendung: Σ' als Koordinatensystem der rotierenden Erde mit Ursprung im Erdmittelpunkt, typischerweise zur Beschreibung einer Bewegung auf oder über der Erdoberfläche.

$$\vec{\omega} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \qquad \text{im Inertialsystem } \Sigma \tag{171}$$

mit $\omega = \dfrac{2\pi}{23.934\,h} = \dfrac{2\pi}{86164\,s}$, wobei $23.934\,h = 86164\,s$ ein <u>siderischer Tag</u> ist. Ein <u>Sterntag</u> sind $24\,h$, der Unterschied liegt daran, dass die Erde an

einem Tag um ca. 1/365 auf ihrer Bahn um die Sonne fortschreitet (und sich in 365 Tagen 366-mal um sich selbst dreht), $23.934\,h \;=\; 24\,h\,\dfrac{365}{366}$. Wir vernachlässigen $\dot{\vec{\omega}}$. Zwar pendelt die Erdachse um die raumfeste z-Achse („Polbewegung“), jedoch nur mit einer Periode von 427 Tagen und weniger als 8 Metern Amplitude am Norpol. Die Ursache dafür ist, dass die Erdachse nicht mit der Symmetrieachse der Erde (die eben keine perfekte Kugel ist) zusammenfällt.

Zentrifugalbeschleunigung $\vec{a}_Z$ für einen Massenpunkt im Abstand $\vec{r}\,'$ vom Erdmittelpunkt:

$$\begin{aligned}
\vec{a}_Z \;&=\; -\,\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right) \;=\; -\omega^2\,\vec{e}_z\times\left(\vec{e}_z\times\vec{r}\,'\right) \\
\text{mit } \vec{e}_z\times\vec{r}\,' \;&=\; x'\,\underbrace{\left(\vec{e}_z\times\vec{e}_x\right)}_{=\vec{e}_y} + y'\,\underbrace{\left(\vec{e}_z\times\vec{e}_y\right)}_{=-\vec{e}_x} + z'\,\underbrace{\left(\vec{e}_z\times\vec{e}_z\right)}_{=0} \\
&=\; x'\vec{e}_y \,-\, y'\vec{e}_x \\
\Rightarrow \quad \vec{a}_Z \;&=\; -\,\omega^2\vec{e}_z\times\left(x'\vec{e}_y \,-\, y'\vec{e}_x\right) \\
&=\; -\,\omega^2\left(-x'\vec{e}_x \,-\, y'\vec{e}_y\right) \;=\; \omega^2\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{172}$$

d.h. $\vec{a}_Z$ ist senkrecht zu $\vec{\omega}$ wie erwartet! (Gl. (172) findet man einfacher aus $\vec{a}_Z = \omega^2\vec{r} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}$.)

In Kugelkoordinaten $\vec{r}\,' = r\vec{e}_r$ (siehe Gl. (93)) ist

$$\begin{aligned}\vec{a}_Z &= (\vec{a}_Z\cdot\vec{e}_r)\,\vec{e}_r + (\vec{a}_Z\cdot\vec{e}_\phi)\,\vec{e}_\phi + (\vec{a}_Z\cdot\vec{e}_\theta)\,\vec{e}_\theta \\ &\overset{(93)-(95)}{=} \omega^2 r\sin\theta\left(\underbrace{\sin\theta\,\vec{e}_r}_{\text{oben}} + \underbrace{\cos\theta\,\vec{e}_\theta}_{\text{Süden auf der Nordhalbkugel, d.h. für } \theta<\pi/2}\right)\end{aligned} \tag{173}$$

Eine bzgl. der Erde bewegte Masse erfährt zudem eine Coriolisbeschleunigung

$$\dot{\vec{r}}\,' = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \qquad v = |\dot{\vec{r}}\,'|$$

$$\vec{a}_C = -\,2\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}\,' = 2\omega\begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{174}$$

<u>Passatwind:</u> Wir betrachten Luftmoleküle, die sich parallel zur Erdoberfläche bewegen:

$$\begin{aligned} &\vec{v} = v_{\text{süd}}\,\vec{e}_\theta + v_{\text{ost}}\,\vec{e}_\phi \\ \Rightarrow\quad &\vec{a}_C = -\,2\vec{\omega}\times\vec{v} = -2\omega\,(v_{\text{süd}}\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\theta + v_{\text{ost}}\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\phi)\end{aligned} \tag{175}$$

$v_{\text{süd}} > 0$ beschreibt also eine Luftmasse, die sich *nach* Süden bewegt, also einen *Nordwind*. Entsprechend ist beim *Westwind* $v_{\text{ost}} > 0$. Um

$$\vec{e}_z\times\vec{e}_\theta = [(\vec{e}_z\times\vec{e}_\theta)\cdot\vec{e}_r]\,\vec{e}_r + [(\vec{e}_z\times\vec{e}_\theta)\cdot\vec{e}_\theta]\,\vec{e}_\theta + [(\vec{e}_z\times\vec{e}_\theta)\cdot\vec{e}_\phi]\,\vec{e}_\phi$$

zu berechnen, nutzen wir die Zyklizität des Spatprodukts aus:

$$\begin{aligned}\vec{e}_z\times\vec{e}_\theta &= \Big[\underbrace{(\vec{e}_\theta\times\vec{e}_r)}_{=-\vec{e}_\phi}\cdot\vec{e}_z\Big]\,\vec{e}_r + \Big[\underbrace{(\vec{e}_\theta\times\vec{e}_\theta)}_{=0}\cdot\vec{e}_z\Big]\,\vec{e}_\theta + \Big[\underbrace{(\vec{e}_\theta\times\vec{e}_\phi)}_{=\vec{e}_r}\cdot\vec{e}_z\Big]\,\vec{e}_\phi \\ &\overset{(95),(93)}{=} \cos\theta\,\vec{e}_\phi\end{aligned} \tag{176}$$

Analog:

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_\phi \;=\; -\sin\theta\,\vec{e}_r \;-\; \cos\theta\,\vec{e}_\theta \;=\; -\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix} \tag{177}$$

Einsetzen von Gl. (176) und (177) in Gl. (175):

$$\vec{a}_C \;=\; -\,2\omega\cos\theta\,v_{\text{süd}}\,\vec{e}_\phi \quad + \quad 2\omega\,v_{\text{ost}}\,(\sin\theta\,\vec{e}_r \;+\; \cos\theta\,\vec{e}_\theta) \tag{178}$$

Westablenkung eines Nordwindes ($v_{\text{süd}} > 0$) auf der Nordhalbkugel ($\cos\theta > 0$).

Südablenkung eines Westwindes ($v_{\text{ost}} > 0$) auf der Nordhalbkugel ($\cos\theta > 0$).

Zyklon = Tiefdruckgebiet: Der Unterdruck zieht Luft aus allen Richtungen an. Auf der Nordhalbkugel:

Einströmender Wind dreht sich im mathematisch positiven Sinn (also gegen den Uhrzeigersinn) ins Tiefdruckgebiet.

Passatwind: Über dem Äquator steigt heiße Luft auf, es strömt Luft aus Norden und Süden nach. Für beide Luftmassen gilt $\cos\theta\, v_{\text{süd}} > 0$:

Ostwind in Äquatornähe als Folge der Westablenkung.

Die Zentrifugalkraft ist i.A. größer als die Corioliskraft. Die meteorologische Bedeutung der Corioliskraft rührt daher, dass sie geschlossenen Luftströmen (Passatwinde, Winde in Tiefdruckgebiete) eine Vorzugsrichtung gibt.