3 Newtonsche Dynamik

3.1 Newtonsche Gesetze

1. „Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder geradlinig-gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.“.

Das entspricht in mathematischer Schreibweise:

$$\vec{F} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\vec{r}} = \text{const.} \tag{179}$$

2. „Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach Richtung der geraden Linie, nach welcher die Kraft wirkt.“

Also:

$$\ddot{\vec{r}} \propto \vec{F} \tag{180}$$

3. „Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich.“ Oder präziser: „Die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.“ („actio = reactio“).

$$\left.\begin{array}{c} A \xrightarrow{\vec{F}_{BA}} \qquad \xleftarrow{\vec{F}_{AB}} B \\ \text{mit } \ \vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} \end{array}\right\} \tag{181}$$

Bemerkungen:

a) 1. ist Spezialfall von 2.

b) Der Proportionalitätsfaktor in Gl. (180) heißt träge Masse

$$\vec{F} =: m\ddot{\vec{r}} \tag{182}$$

c) Gl. (180) und (182) sind nur korrekt, wenn die Masse m zeitlich konstant ist. (Eine Rakete verliert z.B. Masse durch den ausgestoßenen Treibstoff, so dass $\dot{m}_{\text{Rakete}} < 0$.)

d) 1.-3. gilt (nur) in Inertialsystemen.

3.2 Mechanik eines Teilchens, Erhaltungssätze

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}} \tag{183}$$

heißt Impuls. Gl. (182) verallgemeinert sich zu

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}} + \dot{m}\dot{\vec{r}} \tag{184}$$

Daraus folgt der Impulserhaltungssatz:

Ist $\vec{F} = 0$, so ist $\vec{p}$ eine Konstante der Bewegung.

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} \tag{185}$$

heißt Drehimpuls und

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{186}$$

heißt Drehmoment.

Bewegter Massenpunkt:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &\overset{(185)}{=} \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \\ &\overset{(183)}{=} m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \vec{F} \overset{(186)}{=} \vec{M} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{M} = \dot{\vec{L}} \tag{187}$$

Daraus folgt der Drehimpulserhaltungssatz:

Ist $\vec{M} = 0$ (d.h. auf den Massenpunkt wirkt kein Drehmoment), so ist $\vec{L}$ eine Konstante der Bewegung.

Es gibt einen subtilen Unterschied zwischen Impuls- und Drehimpulserhaltungssatz: Ist in einem Inertialsystem $\vec{F} = 0$, so auch in jedem anderen, d.h. die Eigenschaft $\vec{F} = 0$ ist invariant unter Galilei-Transformationen. Hingegen gibt es die Möglichkeit, dass in einem bestimmten Inertialsystem $\vec{M} = 0$ gilt, in anderen jedoch nicht. Ein Beispiel ist ein Massenpunkt, der sich unter der Wirkung einer Zentripetalkraft $\vec{F}$ mit konstantem $|\vec{F}|$ auf einer Kreisbahn bewegt. Im Koordinatensystem, dessen Ursprung mit dem Kreismittelpunkt zusammenfällt, ist $\vec{F} \parallel -\vec{r}$ und somit $\vec{M} = 0$. In diesem Bezugssystem ist also der Drehimpuls erhalten. Verschieben wir den Nullpunkt um $\vec{r}_0$ weg vom Kreismittelpunkt, so ist im neuen Bezugssysten $\dot{\vec{L}} = \vec{M} \neq 0$.

Ist $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$ ortsabhängig, so spricht man von einem Kraftfeld. Beispielsweise unterscheidet sich die Gravitationskraft (Schwerkraft), die die Erde auf Himmelskörper (z.B. auf Satelliten wie den Mond) ausübt, an verschiedenen Orten in Richtung oder Betrag. Lediglich in der Nähe des Erdbodens dürfen wir mit der konstanten Gewichtskraft $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$ rechnen.

Wir betrachten einen Massenpunkt, der unter dem Einfluss des Kraftfeldes $\vec{F}$ den Weg $\mathcal{C}$ durchläuft:

$\mathcal{C}: \quad u \to \vec{r}(u)$ mit $\vec{r}(u_1) = \vec{u}_1$ und $\vec{r}(u_2) = \vec{r}_2$. Hier ist u ein Kurvenparameter, z.B. die Bogenlänge oder die Zeit t. Das Wegelement $\vec{ds} = \vec{t}(u)\,du$ mit dem Tangentenvektor $\vec{t}(u)$ brauchen wir zunächst für den Spezialfall $u = t$, also

$$\vec{ds} = \vec{v}(t)\,dt \tag{188}$$

Damit ist

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{ds} \;:=\; \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t), t)\, \vec{v}(t)\, dt \tag{189}$$

und

$$W[\mathcal{C}] \;=\; \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{ds} \tag{190}$$

heißt die von der Kraft $\vec{F}$ am Massenpunkt auf dem Weg $\mathcal{C}$ verrichtete <u>Arbeit</u>.

$T := \dfrac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}$ heißt <u>kinetische Energie</u>. Ab jetzt betrachten wir nur noch den Fall, das m nicht von der Zeit abhängt.

$$\begin{aligned} W[\mathcal{C}] \;&\overset{(189)}{=}\; \int_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \;\overset{(182)}{=}\; m \int_{t_1}^{t_2} dt\, \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \;=\; \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt}\, \dot{\vec{r}}^{\,2} \\ &=\; \frac{m}{2} \left(\dot{\vec{r}}(t_2)\right)^2 - \frac{m}{2} \left(\dot{\vec{r}}(t_1)\right)^2 \;=\; T_2 - T_1, \end{aligned} \tag{191}$$

wobei $T_{1,2} := T(t_{1,2})$ ist. Die verrichtete Arbeit ist also gleich der Differenz der kinetischen Energien an End- und Anfangspunkt von $\mathcal{C}$.

Ein Kraftfeld heißt <u>konservativ</u>, wenn es so beschaffen ist, dass

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{ds} \;= 0$$

gilt für *alle geschlossenen* Wege $\mathcal{C}$. Dabei wird $\mathcal{C}$ für eine konstante Zeit durchlaufen und es ist zu beachten, dass die betrachteten Wege $\mathcal{C}$ beliebig sind. Das ist ein Unterschied zur Situation in Gl. (191), wo $\mathcal{C}$ nur bestimmte Wege bezeichnet, nämlich solche, die ein Massenpunkt unter dem Einfluss der Kraft $\vec{F}$ nehmen kann. Beim Wurf im erdnahen Schwerefeld von $\vec{r}(t_1)$ nach $\vec{r}(t_2)$, die Anfangs- und Endpunkt von $\mathcal{C}$ bezeichnen, ist $\mathcal{C}$ eine Wurfparabel. (Es gibt ∞-viele solche Wurfparabeln, mit unterschiedlichen Abwurfwinkeln und dem Wurfziel $\vec{r}_2$ entsprechend angepassten Anfangsgeschwindigkeiten, wie jede(r) Basketballspieler*in bestätigen kann.)

Die Arbeit $W[\mathcal{C}] \ := \ \int_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{F} \cdot \vec{ds}$ ist auch sinnvoll definiert, wenn der Weg $\mathcal{C}$ beliebig ist: Ein Beispiel wäre ein Weg, den ein Fahrradfahrer von einem Punkt $\vec{r}_1$ auf einem Berg zu einem Punkt $\vec{r}_2$ im Tal nimmt und der aus Überlegungen des Gesundheitsschutzes besser *keine* Wurfparabel ist. Dennoch ist es sinnvoll, die Arbeit zu betrachten, die die Gewichtskraft $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$ an Fahrrad und Fahrer leistet. Hier sind noch weitere Kräfte im Spiel, die das Fahrrad auf der Straße halten, und zwar die Gegenkraft der Straße, ohne die das Fahrrad frei fiele, und die Kräfte des Lenkers, ohne die das Fahrrad von der Straße abkäme. Diese Kräfte nennt man *Zwangskräfte* $\vec{Z}$, weil sie das betrachtete Objekt (Massenpunkt, Fahrrad,...) auf den Weg $\mathcal{C}$ zwingen. Aber $T_2 - T_1$ des ungebremsten Fahrrads können wir dennoch durch Einsetzen von $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$ in Gl. (191) bestimmen, denn diese Zwangskräfte $\vec{Z}$ stehen senkrecht auf $\vec{ds}$ und tragen somit zu $(\vec{F} + \vec{Z}) \cdot \vec{ds} = \vec{F} \cdot \vec{ds}$ nicht bei. (Bremst der Fahrer hingegen auf seinem Weg ins Tal, so muss die Reibungskraft $\vec{F}_{\text{brems}} \parallel -\vec{ds}$ jedoch im Integral in Gl. (191) mitberücksichtigt werden.)

Wir betrachten als nächstes die von einer konservativen *zeitunabhängigen* Kraft $\vec{F}$ geleistete Arbeit auf zwei verschiedene Wegen $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$, die dieselben Punkte $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ verbinden und finden:

$$W[\mathcal{C}_1] \ = \ \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot \vec{ds} \ = \ \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot \vec{ds} \ = \ W[\mathcal{C}_2],$$

denn $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \circ (-\mathcal{C}_2)$ ist geschlossen, d.h. wegen der Konservativität von $\vec{F}$ ist die geleistete Arbeit gleich null auf dem Weg $\mathcal{C}$, der von $\vec{r}_1$ zu $\vec{r}_2$ und wieder zurück zu $\vec{r}_1$ führt. Für konservative zeitunabhängige Kräfte ist die Arbeit in Gl. (191) also vom Weg unabhängig und man darf

$$W[\vec{r}_1, \vec{r}_2] \ := \ \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \vec{ds} \tag{192}$$

schreiben. Mit Gl. (192) können wir –nur– für konservative Kraftfelder das

Potential (= die potentielle Energie) definieren:

$$V(\vec{r}) \;:=\; -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot\vec{ds} \tag{193}$$

V hängt vom gewählten Bezugspunkt $\vec{r}_0$ ab, Differenzen $V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$ jedoch nicht. Die Definition Gl. (193) gilt auch für konservative zeit*ab*hängige Kräfte, wobei der Weg von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$ für eine feste Zeit durchlaufen wird, und V dann ebenfalls zeitabhängig ist.

Ist $\vec{F}$ unabhängig von t und bewegt sich unser Massenpunkt unter dem Einfluss von $\vec{F}$ von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$, so finden wir

$$W[\vec{r}_1, \vec{r}_2] \;\overset{(192)}{:=}\; \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot\vec{ds} \;\overset{(193)}{=}\; V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) \;=:\; V_1 - V_2 \tag{194}$$

und wir finden für Gl. (191) für die Energie

$$E \;:= T + V \tag{195}$$

die Beziehung

$$E_1 \;=\; T_1 + V_1 \;=\; T_2 + V_2 \;=\; E_2, \tag{196}$$

also Energieerhaltung für konservative, zeitunabhängige Kraftfelder. $E = T(\dot{\vec{r}}(t)) + V(\vec{r}(t))$ ist also Konstante der Bewegung.

Gl. (193) zeigt uns, wie man für eine konservative Kraft $\vec{F}$ das zugehörige Potential findet. Nun leiten wir eine Formel her, die umgekehrt zu vorgegebenem V die Kraft $\vec{F}$ liefert. Dazu betrachten wir einen geraden Weg von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r} = \vec{r}_0 + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, so dass (mit Kurvenparameter x) $\vec{ds} = \vec{e}_x dx$ ist:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}_1) \;&=\; -\int_{x_0}^{x_0+x} dx\,\vec{F}\cdot\vec{e}_x \;=\; -\int_{x_0}^{x_0+x} dx\,F_x \\ \Rightarrow \qquad \frac{\partial V}{\partial x} \;&=\; -\frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x_0+x} dx\,F_x \;=\; -F_x. \end{aligned}$$

Analog findet man $\frac{\partial V}{\partial y} = -F_y$ und $\frac{\partial V}{\partial z} = -F_z$ also

$$\vec{F} \;=\; -\vec{\nabla} V. \tag{197}$$

Für jedes (differenzierbare) V ist das aus Gl. (197) gewonnene $\vec{F}$ auch tatsächlich konservativ, denn mit dem Kurvenparameter u und $\vec{r}(u_0) = \vec{r}(u_1) =: \vec{r}_0 \in \mathcal{C}$ ist

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{ds} \;&=\; -\int_{u_0}^{u_1} \vec{\nabla} V(\vec{r}(u)) \cdot \frac{d\vec{r}}{du}\, du \\
&=\; -\int_{u_0}^{u_1} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{du} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{du} \right) du \\
&=\; -\int_{u_0}^{u_1} \frac{dV}{du}\, du \;=\; V(\vec{r}(u_0)) - V(\vec{r}(u_1)) \\
&= V(\vec{r}_0) - V(\vec{r}_0) \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Die Existenz eines Potential ist also notwendig und hinreichend dafür, dass die zugehörige Kraft $\vec{F}$ in Gl. (197) konservativ ist.

Um ein praktisches Kriterium für konservative Kräfte zu finden, definieren wir

$$\operatorname{rot} \vec{A} \;:=\; \vec{\nabla} \times \vec{A} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}, \tag{198}$$

die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{A} \;=\; \vec{A}(\vec{r}) \;=\; \begin{pmatrix} A_x(\vec{r}) \\ A_y(\vec{r}) \\ A_z(\vec{r}) \end{pmatrix}.$$

In Komponentenschreibweise:

$$(\operatorname{rot} \vec{A})_j \;:=\; (\vec{\nabla} \times \vec{A})_j \;=\; \sum_{kl=1}^{3} \epsilon_{jkl} \frac{\partial A_l}{\partial x_k} \tag{199}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{A}$ ist ein Maß für die „Wirbelstärke".

Beispiel:

$$a \in \mathbb{R}, \qquad \vec{A} \;=\; a \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{A} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ zeigt aus der Zeichenebene, in der die Komponenten von $\vec{A}$ liegen, heraus. (Das ist i.A. nicht so und liegt im Beispiel daran, dass sowohl $A_z = 0$ ist und $A_{x,y}$ nicht von z abhängen.)

Für eine beliebige Funktion $f(\vec{r})$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f\right)_j &= \underbrace{\sum_{k,l=1}^{3} \epsilon_{jkl} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l}} f}_{\text{symmetrisch bzgl. } k \leftrightarrow l} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Also

$$
\operatorname{rot} \operatorname{grad} f \;= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f \;=\; 0. \tag{200}
$$

Für eine konservative Kraft gilt also

$$
\vec{\nabla} \times \vec{F} \;=\; -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V \;=\; 0 \tag{201}
$$