Im nächsten Schritt nehmen wir umgekehrt an, dass

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \; = 0 \tag{202}$$

gilt. Wir definieren

$$V_{\mathcal{C}}(\vec{r}) \; := \; - \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{ds}, \tag{203}$$

wobei $\mathcal{C}$ die Strecke zwischen den Punkten $\vec{r}_0$ und $\vec{r}$ bezeichnet. Unser Ziel ist zu beweisen, dass Gl. (202) hinreichend dafür ist, dass $\vec{F}$ ein konservatives Kraftfeld beschreibt. Diesen Beweis führen wir, indem wir zeigen werden, dass $V_{\mathcal{C}}(\vec{r})$ ein Potential ist. Wir benötigen

$$\vec{F}\left(\vec{r}\,'(u)\right) \quad \text{mit} \;\; \vec{r}\,'(u) \; = \; \vec{r}_0 \; + \; u(\vec{r} - \vec{r}_0) \; = \; \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \; + \; u \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \tag{204}$$

$$\begin{aligned} \vec{ds} \; &= \frac{d\vec{r}\,'}{du} du \; = \; (\vec{r} - \vec{r}_0)\, du \\ \Rightarrow \quad \vec{F} \cdot \vec{ds} \; &= \vec{F}\left(\vec{r}\,'(u)\right) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)\, du \\ &= \left[F_{x'}(x - x_0) + F_{y'}(y - y_0) + F_{z'}(z - z_0)\right] \, du \end{aligned} \tag{205}$$

Hier wurde das Argument von $F_{x'} = F_{x'}\left(\vec{r}\,'(u)\right)$ usw. weggelassen, um Platz zu sparen. In dieser Parametrisierung unseres Weges $\mathcal{C}$ läuft der Kurvenparameter u von 0 bis 1, $\vec{r}\,'$ läuft dabei von $\vec{r}_0$ bis $\vec{r}$ und Gl. (203) wird zu

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{C}}(\vec{r}) \; &:= \; - \int_0^1 \vec{F}\left(\vec{r}\,'(u)\right) \cdot \frac{d\vec{r}\,'}{du} du \\ &= \; - \int_0^1 \left[F_{x'}(x - x_0) + F_{y'}(y - y_0) + F_{z'}(z - z_0)\right] \, du \end{aligned} \tag{206}$$

Im nächsten Schritt berechnen wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_{\mathcal{C}}}{\partial x} &= -\int_0^1 \Bigg[F_{x'} + \frac{\partial F_{x'}}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F_{y'}}{\partial x}(y-y_0) \\
&\qquad + \frac{\partial F_{z'}}{\partial x}(z-z_0) \Bigg] du \\
&= -\int_0^1 \Bigg[F_{x'} + \frac{\partial F_{x'}}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F_{y'}}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}(y-y_0) \\
&\qquad + \frac{\partial F_{z'}}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}(z-z_0) \Bigg] du \\
&\overset{(204)}{=} -\int_0^1 \Bigg[F_{x'} + \frac{\partial F_{x'}}{\partial x'}\, u\,(x-x_0) + \frac{\partial F_{y'}}{\partial x'}\, u\,(y-y_0) \\
&\qquad + \frac{\partial F_{z'}}{\partial x'}\, u\,(z-z_0) \Bigg] du \qquad (207)
\end{aligned}
$$

Jetzt verwenden wir $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Das bedeutet (siehe Gl. (198) mit der Ersetzung von $\vec{A}(\vec{r})$ durch $\vec{F}(\vec{r}\,'))$, dass

$$
\frac{\partial F_{y'}}{\partial x'} = \frac{\partial F_{x'}}{\partial y'} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F_{z'}}{\partial x'} = \frac{\partial F_{x'}}{\partial z'} \qquad (208)
$$

ist. Einsetzen in Gl. (207) liefert:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_{\mathcal{C}}}{\partial x} &= -\int_0^1 \left[F_{x'} + \frac{\partial F_{x'}}{\partial x'}(x-x_0)\,u + \frac{\partial F_{x'}}{\partial y'}(y-y_0)\,u + \frac{\partial F_{x'}}{\partial z'}(z-z_0)\,u \right] du \\
&= -\int_0^1 \left[F_{x'} + \frac{dF_{x'}}{du} u \right] du
\end{aligned}
$$

Mit partieller Integration beim zweiten Summanden findet man

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_{\mathcal{C}}}{\partial x} &= -\int_0^1 F_{x'}\, du - \Big[F_{x'}\left(\vec{r}_0 + u(\vec{r}-\vec{r}_0)\right) u \Big]_0^1 + \int_0^1 F_{x'}\, du \\
&= -F_x(\vec{r}), \qquad (209)
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt $x'(u) = x_0 + u(x - x_0)$ mit $u = 1$ verwendet wurde. Ebenso findet man

$$
\frac{\partial V_{\mathcal{C}}}{\partial y} = -F_y(\vec{r}), \qquad \text{und} \quad \frac{\partial V_{\mathcal{C}}}{\partial z} = -F_z(\vec{r}). \qquad (210)
$$

Damit erfüllt $V_{\mathcal{C}}$ Gl. (197) und ist ein Potential! Wie nach Gl. (197) bewiesen, ist $\vec{F} = -\vec{\nabla} V_{\mathcal{C}}$ also konservativ. Wir fassen zusammen: Gilt überall

Gl. (202), so ist $\vec{F}$ konservativ. Mithin dürfen wir dann in $V_{\mathcal{C}}$ den Index $\mathcal{C}$ weglasssen, denn für konservative Kräfte ist ja gerade das Integral in Gl. (203) unabhängig vom Weg!

Eine Besonderheit ist zu beachten, wenn die Bedingung $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ nur in einem Teilgebiet $G \in \mathbb{R}^3$ erfüllt ist. Die Beweisführung von Gl. (202–210) nahm an, dass es einen Punkt $\vec{r}_0$ in G gibt, den wir mit jedem anderen Punkt $\vec{r}$ durch eine Strecke verbinden können. So ein Gebiet nennt man *sternförmig*. Durch Zusammensetzen mehrerer Strecken kann man den Beweis auch auf bestimmte nicht-sternförmige Gebiete ausweiten, aber man kann auch Gegenbeispiele finden. Dazu betrachten wir

$$V_{\mathcal{C}_1}(\vec{r}) \;:=\; -\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot \vec{ds}, \qquad\qquad V_{\mathcal{C}_2}(\vec{r}) \;:=\; -\int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot \vec{ds}, \tag{211}$$

mit zwei beliebigen Wegen $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$, die beide $\vec{r}_0$ mit $\vec{r}$ verbinden:

Können wir $\mathcal{C}_2$ stetig in $\mathcal{C}_1$ deformieren (also bei festgehaltenen Endpunkten alle Punkte auf $\mathcal{C}_2$ auf Punkte in $\mathcal{C}_1$ verschieben), ohne dabei das Gebiet G zu verlassen[1], so dürfen wir schließen, dass $V_{\mathcal{C}_1} = V_{\mathcal{C}_2}$ ist, denn wegen $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ ist das Integral in Gl. (211) unabhängig vom Weg. Für den geschlossenen Weg $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \circ (-\mathcal{C}_2)$ ist also $\oint \vec{F} \cdot \vec{ds} = 0$ und $\vec{F}$ konservativ. Ein Gebiet, in dem man jeden Weg $\mathcal{C}_2$ stetig in jeden Weg $\mathcal{C}_1$ mit gleichen Endpunkten deformieren kann, heißt einfach zusammenhängend.[2]

Wir fassen zusammen:

[1] In der Mathematik spricht man dann von zwei homotopen Wegen.

[2] Geschlossene Wege in einfach zusammenhängenden Gebieten kann man also stetig in einen Punkt deformieren, sie sind nullhomotop.

Gilt $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G, so ist $\vec{F}$ dort konservativ, also $\oint \vec{F} \cdot \vec{ds} = 0$ für alle geschlossenen in G verlaufenden Wege. Wir können dann ein Potential V mit $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ finden. Ist zudem V unabhängig von t, so ist die Energie $E = T + V$ auf jedem Weg, den ein Massenpunkt unter dem Einfluss von $\vec{F}$ in G durchläuft, erhalten.

Was passiert nun mit $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ in nicht zusammenhängenden Gebieten G? Umschließt der Weg in $\oint \vec{F} \cdot \vec{ds}$ ein Gebiet, in dem $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$ ist, so kann $\oint \vec{F} \cdot \vec{ds} \neq 0$ sein. Das Potential $V_{\mathcal{C}_1}(\vec{r})$ in Gl. (211) ist dann an mindestens einer Stelle unstetig, wenn $\vec{r}$ den beschriebenen geschlossenen Weg komplett durchläuft (siehe Übungsaufgabe).

3.3 Zweikörper-Zentralkraftproblem

Beispiel:
m_1 =Planetenmasse
m_2 =Sonnenmasse

$$\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{212}$$

Zentralpotential:

$$U(\vec{r}) := U(r) \qquad \text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{213}$$

Kraft:

3. Newtonsches Gesetz, Gl. (181)

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ -\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12} &= \vec{\nabla} U(\vec{r}) = \frac{dU(r)}{dr} \vec{\nabla} r \\ &= \frac{dU(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned} \tag{214}$$

Schwerpunkt:

$$\vec{r}_S := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{215}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}}_S = \frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}{m_1 + m_2} \overset{(181)}{=} 0$$

Der Schwerpunkt bewegt sich also geradlinig-gleichförmig. Aus Gl. (212) und (215) folgt

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_S + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{r} && (216a) \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_S - \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{r} && (216b) \end{aligned}$$

$$\vec{F}_{21} = m_1\ddot{\vec{r}}_1 \overset{(216)}{=} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\,\ddot{\vec{r}},$$

also

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21} \overset{(214)}{=} -\vec{\nabla}U \tag{217}$$

mit der <u>reduzierten Masse</u>

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \tag{218}$$

Ab jetzt betrachten wir alles im <u>Schwerpunktsystem</u>, das durch

$$\vec{r}_S = 0, \qquad \dot{\vec{r}}_S = 0,$$

charakterisert ist. Wegen $\ddot{r}_S = 0$ ist es ein Inertialsystem.

Drehimpuls:

$$\begin{aligned} \vec{l} &= m_1\,\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2\,\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 \\ &\overset{(216)}{=} \mu\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}} && (219) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{l}} = \vec{M} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{21} \overset{(214)}{\propto} \vec{r} \times \vec{r} = 0 \\ \Rightarrow \qquad \vec{l} &= \text{const.} && (220) \end{aligned}$$

Wegen Gl. (219) ist $\vec{r} \perp \vec{l}$ und $\dot{\vec{r}} \perp \vec{l}$. Die Bewegung $\vec{r}(t)$ verläuft also <u>in einer Ebene</u> senkrecht zum konstanten Vektor $\vec{l}$.

Ebene Polarkoordinaten (wobei nun ϕ in θ umgetauft ist):

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{221}$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + r\dot{\theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{222}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\dot{\theta} \end{pmatrix} \tag{223}$$

Mit der Bezeichung $l = l_z$ (l ist also nicht der Betrag von $\vec{l}$) gilt also:

$$l = \mu r^2\dot{\theta} = \text{const.} \tag{224}$$

In der Zeiteinheit dt überstreicht der Radiusvektor $\vec{r}$ den Winkel $d\theta = \dot{\theta}\,dt$ und die Fläche $dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$:

$$dA = \frac{r^2}{2}\dot{\theta}\,dt \overset{(224)}{=} \frac{l}{2\mu}\,dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu} = \text{const.} \tag{225}$$

Dies ist das <u>zweite Keplersche Gesetz der Planetenbewegung:</u>

Der Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleich Flächen.

Strategie: Lösung der Bewegungsgleichung Gl. (217) mit Hilfe der Erhaltungsgrößen $\vec{l}$ und E.

Energieerhaltung: Aus

$$\mu\ddot{\vec{r}} \overset{(214)}{=} -\vec{\nabla}U$$

folgt analog zu Gl. (191)-(196), dass

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + U(r) \tag{226}$$

konstant ist. Mit Gl. (222) finden wir

$$T := \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right). \tag{227}$$

Aus $\dot\theta \overset{(224)}{=} \dfrac{l}{\mu r^2}$ folgt also

$$T \;= \frac{\mu}{2}\dot{\vec r}^{\,2} \;+\; \frac{l^2}{2\mu r^2} \tag{228}$$

und

$$E \overset{(226)}{=} \underbrace{\frac{\mu}{2}\dot{\vec r}^{\,2} \;+\; \underbrace{\frac{l^2}{2\mu r^2}} + U(r)}_{\underline{\text{Zentrifugalpotential}}} \tag{229}$$

„Äquivalentes Einteilchenproblem“:

Gl. (229) entspricht der Bewegungsgleichung eines Teilchens in einer Dimension (mit Koordinate r) im Potential

$$U(r) \,+\, \frac{l^2}{2\mu r^2} \;=: U'(r) \tag{230}$$

Wir spezialisieren uns jetzt auf den Fall, dass $U(r)$ überall anziehend, $\frac{dU}{dr} > 0$ und $U(\infty) = 0$ ist, z.B.:

$$U(r) \;=\; -\,\frac{\alpha}{r^\beta} \qquad \text{mit} \;\; \alpha, \beta > 0 \tag{231}$$

Falls $\lim\limits_{r\to 0} r^2 U(r) = 0$ und $\lim\limits_{r\to\infty} r^2 U(r) < 0$ ist, hat $U'(r)$ ein Minimum. (Im Beispiel Gl. (231) ist das so für $\beta < 2$.)

Für $E < 0$ gibt es gebundene Bewegungen, bei denen r auf $r_{\min} \le r \le r_{\max}$ beschränkt ist.

$$E \;= T'(r) \,+\, U'(r) \tag{232a}$$

$$\text{mit} \qquad T'(\dot r) \;= \frac{\mu}{2}\dot r^{\,2} \tag{232b}$$

$T' \geq 0 \quad \Rightarrow \quad E \geq U'(r)$, und

$$U'(r_{\min}) \ = U'(r_{\max}) \ = \ E$$

D.h. für $E < 0$ umkreisen sich die beiden Körper. Der Fall $E \geq 0$ hingegen bedeutet, dass ein Körper aus dem Unendlichen eintrifft und den anderen teilweise umrundet und dann wieder ins Unendliche verschwindet.

Aus Gl. (232) folgt:

$$\dot{r} \ = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U'(r)\right)} \tag{233}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\dot{r}}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U'(r)\right)}} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \int_{t_0}^{t_1} dt \, \frac{\dot{r}}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U'(r)\right)}} = t_1 - t_0$$

$$\Rightarrow \qquad \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U'(r)\right)}} = t_1 - t_0 \tag{234}$$

mit $r_0 = r(t_0)$ und $r_1 = r(t_1)$. Gl. (234) definiert die Funktion $t(r)$. Die Umkehrfunktion ist das gesuchte $r(t)$.

Mit $r(t)$ finden wir dann

$$\begin{aligned} \theta(t) \ &= \theta_0 \ + \int_{t_0}^{t} dt' \, \dot{\theta}(t') \\ &= \theta_0 \ + \frac{l}{\mu} \int_{t_0}^{t} dt' \, \frac{1}{\left(r(t')\right)^2} \qquad \text{mit} \ \ \theta_0 = \theta(t_0). \end{aligned} \tag{235}$$

Gl. (234) ist schwer zu lösen, und man kann keinen analytischen Ausdruck für die Umkehrfunktion finden. Einfacher ist die Bestimmung der Bahnkurve $r(\theta)$ bzw $\theta(r)$.