Zunächst:

$$\dot{r} \;=\; \frac{dr}{dt} \;=\; \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} \overset{(224)}{=} \frac{l}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta} \tag{236}$$

$$\Rightarrow \qquad E \overset{(232)}{=} \underbrace{\frac{l^2}{2\mu r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}_{=T'} + U'(r)$$

$$\Rightarrow \qquad \left|\frac{d\theta}{dr}\right| \;=\; \frac{|l|}{r^2}\frac{1}{\sqrt{2\mu(E-U'(r))}}$$

$$\int_{r_0}^{r}\frac{d\theta}{dr'}\,dr' \;=\; \pm\,|l|\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2\sqrt{2\mu\,(E-U'(r'))}}$$

Dabei sind r_0 und r so gewählt, dass $\frac{d\theta}{dr'}$ das Vorzeichen nicht wechselt für $r_0 \leq r' \leq r$. Ideal: $r_0 = r_{\text{min}}$.

$$\theta(r) \;=\; \theta_0 \pm |l|\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2\sqrt{2\mu\,(E-U'(r'))}} \qquad \text{mit } \theta_0 = \theta(r_0) \tag{237}$$

$\uparrow$

I.A. (außer an den Scheitelpunkten) gibt es zu jedem r zwei Lösungen für θ. (Beispiel: Sonne und Erde im Frühling und Herbst, verschiedene θ mit gleichem $r(\theta)$.)

Die Umkehrfunktion $r(\theta)$ ist die gesuchte Bahnkurve.

Der Spezialfall

$$U(r) \;=\; -\frac{\alpha}{r} \tag{238}$$

definiert das Kepler-Problem.

Newtonsches Gravitationsgesetz:

> *Zwei Körper mit Massen m_1 und m_2 erfüllen Gl. (238) mit $\alpha = G_N m_1 m_2$ und*
>
> $$G_N \;=\; (6,6742 \pm 0,0010)\cdot 10^{-4}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}. \tag{239}$$

G_N heißt Newtonsche Gravitationskonstante. Mit Gl. (238) wird Gl. (237) zu

$$\theta(r) \;=\theta_0 \pm |l|\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2\sqrt{2\mu\left(E-\frac{l^2}{2\mu r'^2}+\frac{\alpha}{r'}\right)}}$$

Mit $u(r) = 1/r$, $u_0 = 1/r_0$, $u' = 1/r'$:

$$\begin{aligned} dr' &= -\frac{1}{u'^2} du' \\ \theta &= \theta_0 \mp |l| \int_{u_0}^{u} \frac{du'}{\sqrt{2\mu E - l^2 u'^2 + 2\mu\alpha' u'}} \end{aligned} \tag{240}$$

Quadratische Ergänzung:

$$2\mu E \,-\, l^2 u'^2 \,+\, 2\mu\alpha u' \;=\; -\,l^2 (u' - \bar{u})^2 \,+\, l^2 B$$

mit

$$\bar{u} = \frac{\mu\alpha}{l^2} \tag{241a}$$

$$B = \frac{\mu\alpha}{l^2}\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}. \tag{241b}$$

Mit Gl. (241) und $v = u' - u$ wird Gl. (240) zu

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 \mp \int_{u_0 - \bar{u}}^{u - \bar{u}} \frac{dv}{\sqrt{B^2 - v^2}} \\ &= \theta_0 \pm \left[\arccos \frac{u - \bar{u}}{B} - \arccos \frac{u_0 - u}{B} \right] \end{aligned} \tag{242}$$

Wir wählen nun r_0 so, dass

$$\arccos \frac{u_0 - \bar{u}}{B} \;=\; 0$$

ist, also $u_0 = \bar{u} + B$. Damit löst

$$\frac{u - \bar{u}}{B} \;=\; \cos(\theta - \theta_0)$$

Gl. (242) für beide Vorzeichen (denn $\cos(\theta - \theta_0) = \cos(\theta_0 - \theta)$). Also

$$\begin{aligned} u \;=\; \frac{1}{r} \;&=\; \bar{u} + B\cos(\theta - \theta_0) \\ &\overset{(241)}{=} \frac{\mu\alpha}{l^2}\left[1 \,+\, \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right]. \end{aligned}$$

Nach r aufgelöst wird daraus

$$r = \frac{1}{C\left(1 + \epsilon\cos(\theta - \theta_0)\right)} \tag{243}$$

mit

$$C = \frac{\mu\alpha}{l^2} \tag{244a}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \tag{244b}$$

ϵ heißt <u>Exzentrität</u>. Gl. (243) ist die Gleichung eines <u>Kegelschnitts</u>:

$$\left.\begin{array}{lll} E > 0 & \Rightarrow \quad \epsilon > 1 & \text{Hyperbel} \\ E = 0 & \Rightarrow \quad \epsilon = 1 & \text{Parabel} \\ E < 0 & \Rightarrow \quad \epsilon < 1 & \text{Ellipse} \\ \text{mit dem Spezialfall} & & \\ E = -\dfrac{\mu\alpha^2}{2l^2} & \Rightarrow \quad \epsilon = 0 & \text{Kreis} \end{array}\right\} \tag{245}$$

Aus Gl. (243) finden wir

$$r(\theta_0) = r_{\min} = \frac{1}{C(1+\epsilon)}. \tag{246}$$

Für $\epsilon < 1$ ist

$$r(\theta_0 + \pi) = r_{\max} = \frac{1}{C(1-\epsilon)}. \tag{247}$$

Die Erde erreicht den Perihel am 5. Januar mit Sonnenabstand $r_{\min} = 147,1 \cdot 10^9\, m$ und den Aphel am 4. Juli mit Sonnenabstand $r_{\max} = 152,1 \cdot 10^9\, m$. Große Halbachse (Hauptachse):

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} \overset{(246)}{\underset{(247)}{=}} \frac{1}{2C(1+\epsilon)} + \frac{1}{2C(1-\epsilon)} \\ &= \frac{1}{C}\frac{1}{1-\epsilon^2} \end{aligned} \tag{248}$$

$$a \overset{(244)}{=} -\frac{\alpha}{2E} \tag{249}$$

D.h. die großen Halbachse hängt nicht von l ab!

Der Fall $\epsilon < 1$ in Gl. (243) entspricht dem 1. Keplerschen Gesetz:

> *Die Planeten durchlaufen Ellipsenbahnen, in deren Brennpunkt die Sonne steht.*

Berechnung der kleinen Halbachse (Nebenachse) b:

Bei $\theta = \theta_b$ sei $y = b$. Extrema von

$$y = r\sin(\theta - \theta_0) \overset{(243)}{=} \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{C\left[1 + \epsilon\cos(\theta - \theta_0)\right]}$$

finden wir als Nullstellen der ersten Ableitung:

$$0 = \frac{dy}{d\theta} = \frac{\epsilon + \cos(\theta - \theta_0)}{C\left[1 + \epsilon\cos(\theta - \theta_0)\right]^2} \qquad \text{für } \theta = \theta_b$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\theta_b - \theta_0) = -\epsilon \tag{250}$$

und

$$r_b = r(\theta_b) \overset{(243)}{=} \frac{1}{C(1 - \epsilon^2)} \overset{(248)}{=} a. \tag{251}$$

Pythagoras:

$$b^2 = r_b^2 - (r_{\max} - a)^2 = a^2 - (r_{\max} - a)^2 = 2ar_{\max} - r_{\max}^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b^2}{a^2} = 2\frac{r_{\max}}{a} - \frac{r_{\max}^2}{a^2}. \tag{252}$$

Mit

$$\frac{r_{\max}}{a} \overset{(247)}{\overset{(248)}{=}} \frac{1 - \epsilon^2}{1 - \epsilon} = 1 + \epsilon$$

und Gl. (252) finden wir

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2(1 + \epsilon) - (1 + \epsilon)^2} = \sqrt{1 - \epsilon^2}, \tag{253}$$

was die geometrische Bedeutung der Exzentrität verdeutlicht.

Fläche der Ellipse:

$$\begin{aligned} A \;&=\; \pi a b \;=\; \pi a^2 \sqrt{1-\epsilon^2} \\ &\overset{(248)}{=} \pi \frac{a^2}{\sqrt{Ca}} \overset{(244)}{=} \pi |l| \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu\alpha}}. \end{aligned} \tag{254}$$

$$A \;=\; \int_0^\tau \left| \frac{dA}{dt} \right| dt \overset{(225)}{=} \frac{|l|}{2\mu}\,\tau \tag{255}$$

Gleichsetzen von Gl. (254) und (255) liefert:

$$\tau \;=\; \frac{2\mu A}{|l|} \;=\; 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}\, a^{3/2} \tag{256}$$

Für $m_1 \gg m_2$ (was für Sonnen- und Planetenmasse erfüllt ist) ist $\mu \approx m_2$. Mit

$$\alpha \overset{(239)}{=} G_N\, m_1\, m_2$$

ist also

$$\tau \overset{(256)}{=} \frac{2\pi}{\sqrt{G_N m_1}}\, a^{3/2}, \tag{257}$$

die Umlaufzeit eines Planeten ist also (im betrachteten Grenzfall $m_1 \gg m_2$) unabhängig von seiner Masse m_2! Dies ist das 3. Keplersche Gesetz:

> *Das Quadrat der Periode τ ist der dritten Potenz der Hauptachse a proportional!*

Dies gilt wegen $\mu \neq m_2$ nur näherungsweise. Mit

$$\mu \;=\; \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \;=\; m_2 \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}$$

finden wir den Korrekturfaktor zu Gl. (257):

$$\tau \;=\; \frac{2\pi}{\sqrt{G_N m_1}}\, a^{3/2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_2}{m_1}}} \tag{258}$$

Für den schwersten Planeten, Jupiter, ist $\frac{m_2}{m_1} \approx 10^{-3}$ und die Korrektur ist 0,5‰.