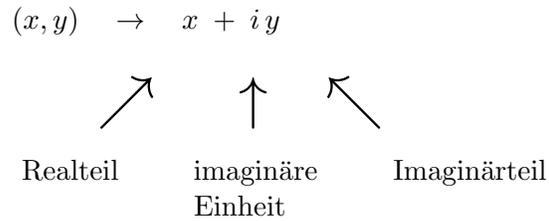


1.2.4 Komplexe Zahlen

Geordnete Paare reeller Zahlen:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{Zwei-Tupel}$$

Schreibweise:

$$(x, y) \rightarrow x + iy$$


Realteil imaginäre Einheit Imaginärteil

- Addition:

$$x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 := x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \quad (14)$$

- Multiplikation:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) := x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) \quad (15)$$

Spezialfall mit $x_1 = x_2 = 0$ und $y_1 = y_2 = 1$:

$$i^2 = -1 \quad (16)$$

Man wählt:

$$i := \sqrt{-1} \quad (17)$$

Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Eigenschaften: Für alle $v, w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

- $$\left. \begin{aligned} w + z &= z + w \\ wz &= zw \end{aligned} \right\} \text{Kommutativgesetz}$$
- $$\left. \begin{aligned} (v + w) + z &= v + (w + z) =: v + w + z \\ v(wz) &= (vw)z =: vwz \end{aligned} \right\} \text{Assoziativgesetz}$$
- $$v(w + z) = vw + vz \quad \text{Distributivgesetz}$$

4. Inverses Element zu $z = x + iy$:

$$(-z) + z = 0 \text{ wobei } -z = -x - iy.$$

Für $z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} := \frac{1}{x + iy} := \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\text{so dass } \frac{1}{z} \cdot z = 1.$$

Polardarstellung:

komplexe Ebene

$$|z| := r := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \quad (18)$$

heißt Betrag von z .

Aus der Zeichnung liest man ab:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= |z| \cos \phi \\ \operatorname{Im} z &= |z| \sin \phi, \end{aligned} \quad (19)$$

also

$$z = |z| \cos \phi + i |z| \sin \phi. \quad (20)$$

Die Funktion

$$f(\phi) = \cos \phi + i \sin \phi \quad (21)$$

erfüllt

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\phi} &= if(\phi), & (22) \\ \text{also } \frac{1}{f(\phi)} \frac{df}{d\phi} &= i \\ \frac{d}{d\phi} \ln f(\phi) &= i \\ \ln f(\phi) &= i\phi + \text{const.} \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$f(\phi) = C e^{i\phi} \quad \text{mit beliebigem } C \in \mathbb{C}.$$

Einsetzen in Gl. (22) und Verwenden von Gl. (8) (und der Kettenregel) bestätigt, dass dieses $f(\phi)$ tatsächlich eine Lösung von Gl. (22) ist. Mit $\phi = 0$ finden wir $f(0) \stackrel{(21)}{=} 1 = e^0$, so dass $C = 1$ sein muss. Folglich ist

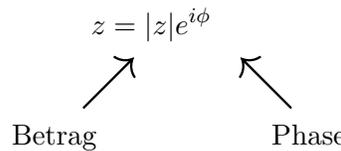
$$\exp(i\phi) = e^{i\phi} := \cos \phi + i \sin \phi \quad (23)$$

die einzig mögliche Verallgemeinerung der Exponentialfunktion auf imaginäre Argumente.

Für beliebige komplexe Zahlen $z = x + iy$ definieren wir

$$\exp z := e^z = e^{x+iy} := e^x e^{iy}. \quad (24)$$

Mit Gl. (23) wird Gl. (20) zur Polardarstellung:

$$z = |z| e^{i\phi} \quad (25)$$


Komplexe Konjugation:

$$z^* := \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z = |z| e^{-i\phi}$$

heißt zu z komplex konjugiert. Also ist $z^* z = |z|^2$.

Den Logarithmus definieren wir für komplexe Argumente über

$$\ln z = \ln \left(|z| e^{i\phi} \right) := \ln |z| + \ln e^{i\phi} = \ln |z| + i\phi \quad (26)$$

wobei wir $-\pi < \phi \leq \pi$ vereinbaren. (Dies ist notwendig, weil $e^{i\phi}$ und $e^{i(\phi+2n\pi)}$ für $n \in \mathbb{Z}$ übereinstimmen.)

Man findet aus Gl. (24)

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad (27)$$

für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und speziell für $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$:

$$e^{i(\phi_1+\phi_2)} = e^{i\phi_1} e^{i\phi_2} \quad (28)$$

Aus Gl. (28) findet man

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) &= e^{i(\alpha+\beta)} \stackrel{(28)}{=} e^{i\alpha} e^{i\beta} \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta). \end{aligned}$$

Aus Real- und Imaginärteil dieser Gleichung findet man die Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (29)$$

Multiplikation und Division sind einfacher in der Polardarstellung:

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{i\phi_1}, & z_2 &= r_2 e^{i\phi_2}, \\ \Rightarrow z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)}, & \frac{1}{z_1} &= \frac{1}{r_1} e^{-i\phi_1}, & \frac{z_2}{z_1} &= \frac{r_2}{r_1} e^{i(\phi_2-\phi_1)}. \end{aligned}$$

Nützlich, um Integrale mit $\sin x$ und $\cos x$ zu lösen sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}), \\ \sin x &= \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}), \end{aligned} \quad (30)$$

die man leicht durch Einsetzen von $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ beweist.

Definitionen:

$$\begin{aligned}\cosh x &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) && \underline{\text{cosinus hyperbolicus}}, \\ \sinh x &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) && \underline{\text{sinus hyperbolicus}}.\end{aligned}\tag{31}$$