1.2.4 Komplexe Zahlen

Geordnete Paare reeller Zahlen:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{Zwei-Tupel}$$

Schreibweise:

$$(x, y) \quad \to \quad x \; + \; i\, y$$

Realteil   imaginäre Einheit   Imaginärteil

- Addition:

$$x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 := x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \tag{14}$$

- Multiplikation:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) := x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) \tag{15}$$

Spezialfall mit $x_1 = x_2 = 0$ und $y_1 = y_2 = 1$:

$$i^2 = -1 \tag{16}$$

Man wählt:

$$i := \sqrt{-1} \tag{17}$$

Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Eigenschaften: Für alle $v, w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $$\left.\begin{aligned} w + z &= z + w \\ wz &= zw \end{aligned}\right\} \quad \text{Kommutativgesetz}$$
2. $$\left.\begin{aligned} (v + w) + z &= v + (w + z) =: v + w + z \\ v(wz) &= (vw)z =: vwz \end{aligned}\right\} \text{Assoziativgesetz}$$
3. $$v(w + z) = vw + vz \qquad \text{Distributivgesetz}$$

4. Inverses Element zu $z = x + iy$:

   $(-z) + z = 0$ wobei $-z = -x - iy$.

   Für $z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} := \frac{1}{x+iy} := \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2},$$

   so dass $\frac{1}{z} \cdot z = 1$.

Polardarstellung:

komplexe Ebene

$$|z| := r := \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2} \tag{18}$$

heißt Betrag von z.

Aus der Zeichnung liest man ab:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, z &= |z| \cos\phi \\ \mathrm{Im}\, z &= |z| \sin\phi, \end{aligned} \tag{19}$$

also

$$z = \ |z| \cos\phi \ + \ i|z| \sin\phi. \tag{20}$$

Die Funktion

$$f(\phi) = \cos\phi + i \sin\phi \tag{21}$$

erfüllt

$$\frac{d\,f}{d\,\phi} = if(\phi), \tag{22}$$

$$\text{also} \qquad \frac{1}{f(\phi)}\frac{d\,f}{d\,\phi} = i$$

$$\frac{d}{d\,\phi}\,\ln f(\phi) = i$$

$$\ln f(\phi) = i\phi + \text{const.}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$f(\phi) = \; C\,e^{i\phi} \qquad \text{mit beliebigem } C \in \mathbb{C}.$$

Einsetzen in Gl. (22) und Verwenden von Gl. (8) (und der Kettenregel) bestätigt, dass dieses $f(\phi)$ tatsächlich eine Lösung von Gl. (22) ist. Mit $\phi = 0$ finden wir $f(0) \overset{(21)}{=} 1 = e^0$, so dass $C = 1$ sein muss. Folglich ist

$$\exp(i\phi) = e^{i\phi} := \cos\phi + i\sin\phi \tag{23}$$

die einzig mögliche Verallgemeinerung der Exponentialfunktion auf imaginäre Argumente.

Für beliebige komplexe Zahlen $z = x + iy$ definieren wir

$$\exp z := e^z = e^{x+iy} := e^x e^{iy}. \tag{24}$$

Mit Gl. (23) wird Gl. (20) zur <u>Polardarstellung</u>:

$$z = \underbrace{|z|}_{\text{Betrag}}\,\underbrace{e^{i\phi}}_{\text{Phase}} \tag{25}$$

Komplexe Konjugation:

$$z^* := \;\text{Re}\,z \;-\; i\text{Im}\,z = |z|e^{-i\phi}$$

heißt <u>zu z komplex konjugiert</u>. Also ist $z^*z = |z|^2$.

Den Logarithmus definieren wir für komplexe Argumente über

$$\ln z = \ln\left(|z|e^{i\phi}\right) := \ln|z| + \ln e^{i\phi} = \ln|z| + i\phi \tag{26}$$

wobei wir $-\pi < \phi \leq \pi$ vereinbaren. (Dies ist notwendig, weil $e^{i\phi}$ und $e^{i(\phi+2n\pi)}$ für $n \in \mathbb{Z}$ übereinstimmen.)

Man findet aus Gl. (24)

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \tag{27}$$

für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und speziell für $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$:

$$e^{i(\phi_1+\phi_2)} = e^{i\phi_1}e^{i\phi_2} \tag{28}$$

Aus Gl. (28) findet man

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)} &\overset{(28)}{=} e^{i\alpha}e^{i\beta} \\
&= (\cos\alpha + i\sin\beta)(\cos\alpha + i\sin\beta) \\
&= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta).
\end{aligned}$$

Aus Real- und Imaginärteil dieser Gleichung findet man die Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned} \tag{29}$$

Multiplikation und Division sind einfacher in der Polardarstellung:

$$\begin{aligned}
& z_1 = r_1 e^{i\phi_1}, \qquad z_2 = r_2 e^{i\phi_2}, \\
\Rightarrow \quad & z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)}, \qquad \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1}e^{-i\phi_1}, \qquad \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}e^{i(\phi_2-\phi_1)}.
\end{aligned}$$

Nützlich, um Integrale mit $\sin x$ und $\cos x$ zu lösen sind die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \\
\sin x &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right),
\end{aligned} \tag{30}$$

die man leicht durch Einsetzen von $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ beweist.

Definitionen:

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) \qquad \underline{\text{cosinus hyperbolicus}}, \\ \sinh x &= \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \qquad \underline{\text{sinus hyperbolicus}}. \end{aligned} \tag{31}$$