1.2.5 Standardmethoden der Integration

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, $a_k \in \mathbb{C}$:

$$P(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n \tag{32}$$

heißt <u>Polynom vom Grad n</u>.

Für $n \geq 1$ hat $P(x)$ eine eindeutige <u>Nullstellenzerlegung</u>

$$\begin{aligned} P(x) = &\; a_n \prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{n_k} \qquad \text{mit } m \leq n, n_k \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{m} n_k = n, x_k \in \mathbb{C}. \\ = &\; a_n \left[(x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \ldots (x - x_m)^{n_m} \right] \end{aligned} \tag{33}$$

n_k heißt <u>Grad</u> der Nullstelle $x = x_k$.

Beispiele:

- $P(x) = 3x^3 - 15x^2 + 24x - 12 = 3(x-1)(x-2)^2$,

  also $n = 3$, $a_3 = 3$, $m = 2$, $x_1 = 1$, $n_1 = 1$, $x_2 = 2$, $n_2 = 2$.

- $P(x) = x^2 - \left(\frac{7}{2} + \frac{3}{2} i\right) x + 1 + 2i = \left(x - \frac{1+i}{2}\right)(x - 3 - i)$.

- $P(x) = x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$.

Sind alle $a_k \in \mathbb{R}$, so sind die Nullstellen reell oder paarweise zueinander komplex konjugiert.

Rationale Funktion:

$$R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \text{mit Polynomen } P(x), Q(x) \text{ und } Q(x) = a_n \prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{n_k}.$$

Ist $\operatorname{Grad} Q = 0$, so findet man als Spezialfall, dass $R(x)$ ein Polynom ist. Für eine echte rationale Funktion gilt $\operatorname{Grad} Q \geq 1$.

Partialbruchzerlegung: Man kann $R(x)$ schreiben als

$$
\begin{aligned}
R(x) := \quad & \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \dots \frac{A_{1n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} \\
& + \frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \dots \frac{A_{2n_2}}{(x-x_2)^{n_2}} \\
& + \dots \\
& + \frac{A_{m1}}{x-x_m} + \frac{A_{m2}}{(x-x_m)^2} + \dots \frac{A_{mn_m}}{(x-x_m)^{n_m}} \\
& + S(x) \qquad\qquad \text{mit } A_{jk} \in \mathbb{C}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

und einem Polynom $S(x)$ mit $\operatorname{Grad} S = \operatorname{Grad} P - \operatorname{Grad} Q$ für $\operatorname{Grad} P \geq \operatorname{Grad} Q$ und $S(x) = 0$ sonst.

A_{k1} heißt Residuum von $R(x)$ beim Pol $x = x_k$.

Beispiel:

$$
R(x) = \frac{2x^3}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{8}{x-2} + \frac{16}{(x-2)^2} + 2
$$

konstantes Polynom $S(x) = 2$

Praktische Berechnung der A_{jk}:

Schritt 1: Am einfachsten findet man die Koeffizienten der höchsten Potenzen der Polstellen: Dazu schreiben wir $Q(x) =: (x - x_j)^{n_j} q_j(x)$, also

$$
R(x) = \frac{P(x)}{(x-x_j)^{n_j} q_j(x)}
$$

und

$$
\begin{aligned}
A_{jn_j} & \overset{(34)}{=} \lim_{x \to x_j} \left[(x-x_j)^{n_j} R(x) \right] = \lim_{x \to x_j} \frac{(x-x_j)^{n_j} \, P(x)}{(x-x_j)^{n_j} \, q_j(x)} \\
& = \frac{P(x_j)}{q_j(x_j)},
\end{aligned}
$$

d.h. man setzt in den Vorfaktor von $(x - x_j)^{-n_j}$ in $R(x)$ einfach $x = x_j$ ein.

Hat $R(x)$ nur einfache Nullstellen, so haben wir unser Ziel bereits erreicht.

Schritt 2: Ein Algorithmus, um A_{j,n_j-1} (und dann sukzessive alle A_{jk} zu berechnen), arbeitet mit

$$R(x) - \frac{A_{jn_j}}{(x-x_j)^{n_j}}$$

weiter, bei dem wegen Gl. (34) die Polstelle $x = x_j$ nur den Grad $n_j - 1$ hat, und fährt analog zu Schritt 1 (mit n_j ersetzt durch $n_j - 1$) fort. In der Praxis hat man es meist nur mit einfachen und doppelten Nullstellen zu tun. Dann ist es einfacher, Gl. (34) auf den Hauptnenner zu bringen, und die Koeffizienten des Zählers mit denen von $P(x)/a_n$ zu vergleichen.

Im obigen Beispiel ist $P(x) = 2x^3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $q_1(x) = (x-2)^2$ und $q_2(x) = x - 1$:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \lim_{x\to 1}\left[(x-1)\frac{2x^3}{(x-1)(x-2)^2}\right] = \frac{P(1)}{q_1(1)} = 2 \\
A_{22} &= \lim_{x\to 2}\left[(x-2)^2\frac{2x^3}{(x-1)(x-2)^2}\right] = \frac{P(2)}{q_2(2)} = 16
\end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{Grad} S = 0$ ist $S(x) = s_0 = \text{const.}$ Also

$$\begin{aligned}
R(x) &= \frac{2}{x-1} + \frac{16}{(x-2)^2} + \frac{A_{21}}{x-2} + s_0 \\
&= \frac{s_0x^3 + (2 + A_{21} - 5s_0)x^2 + (8 - 3A_{21} + 8s_0)x - 8 + 2A_{21} - 4s_0}{(x-1)(x-2)^2} \\
&\overset{!}{=} \frac{2x^3}{(x-2)^2(x-1)} \\
\Rightarrow &\quad s_0 = 2 \quad \text{und} \quad A_{21} = 8.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung kann man jede rationale Funktion integrieren:

$$
\begin{aligned}
\int dx R(x) = \quad & A_{11}\ln(x-x_1) - A_{12}\frac{1}{x-x_1} - \frac{A_{13}}{2}\frac{1}{(x-x_1)^2} - \\
& \qquad\qquad \ldots - \frac{A_{1n_1}}{n_1-1}\frac{1}{(x-x_1)^{n_1-1}} \\
& + A_{21}\ln(x-x_2) - A_{22}\frac{1}{x-x_2} - \ldots \\
& \vdots \\
& + \underbrace{\int dx S(x)}_{\text{Polynom}} \qquad (35)
\end{aligned}
$$

Wird $x - x_k$ auf dem Integrationsweg negativ, so kann man als Stammfunktion von $\frac{1}{x-x_k}$ die Funktion $\ln\frac{x-x_k}{\alpha}$ mit geeignetem $\alpha \in \mathbb{C}$ wählen , z.B. $\alpha = -1$, denn

$$
\frac{d}{dx}\ln\frac{x-x_k}{\alpha} = \frac{\alpha}{x-x_k}\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{x-x_k}
$$

Standardsubstitutionen: R bezeichne eine rationale Funktion. Wir benötigen auch rationale Funktionen mit zwei Variablen:

$$
R(x,y) := \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},
$$

wobei P und Q Polynome in zwei Variablen sind, also die Form

$$
P(x,y) := \quad a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots,
$$

mit $a_{jk} \in \mathbb{C}$ haben.

(a) $\int dx R(x, \sqrt{a+bx})$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a + bx \geq 0$.
Beispiel: Mit $R(x,y) = \frac{1+y^2}{2+3xy}$ ist $R(x,\sqrt{a+bx}) = \frac{1+a+bx}{2+3x\sqrt{a+bx}}$.

Substitution:

$$
\begin{aligned}
t \;=\; \sqrt{a+bx} \qquad &\Rightarrow \qquad x = \frac{t^2}{b} - \frac{a}{b} \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{2t}{b}\,dt \\
\text{also:} \qquad \int dx R(x, \sqrt{a+bx}) &= \int dt\, \overbrace{\underbrace{\frac{2t}{b} R(\frac{t^2-a}{b}, t)}}^{\text{rationale Funktion}}
\end{aligned} \tag{36}
$$

Das Integral ist also lösbar mit Partialbruchzerlegung und Gl. (35) (wobei dort $R(x)$ durch $\dfrac{2t}{b}R(t^2-a,t)$ zu ersetzen ist).

(b) $\displaystyle\int dxR(x, \sqrt{(x-a)(x-b)})$ $\qquad$ mit $b > a \in \mathbb{R}$.

<u>Euler-Substitution</u>:

$$
t = \sqrt{\frac{x-a}{x-b}} \qquad \text{für } x \geq b \quad \text{oder } x \leq a \tag{37a}
$$

$$
t = \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \qquad \text{für } a \leq x \leq b \tag{37b}
$$

Wir betrachten den Fall Gl. (37a):

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{bt^2 - a}{t^2 - 1} \\
\Rightarrow \quad \sqrt{(x-a)(x-b)} &= |x-b|\,t \;=\; (b-a)\frac{t}{|t^2-1|} \\
dx &= (a-b)\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt
\end{aligned}
$$

Also:

$$
\begin{aligned}
&\int dx\, R(x, \sqrt{(x-a)(x-b)}) \;= \\
&\qquad 2(a-b)\int dt\, \overbrace{\underbrace{\frac{t}{(t^2-1)^2} R\left(\frac{bt^2-a}{t^2-1}, \frac{(b-a)t}{|t^2-1|}\right)}}^{\text{rationale Funktion}}
\end{aligned} \tag{38}
$$

Für $x > b$ ist $t > 1$, also $|t^2-1| = t^2-1$, während für $x < a$ stattdessen $t < 1$ und $|t^2-1| = 1-t^2$ ist.

Eine Alternative zur Euler-Substitution ist (hier erklärt für den Fall $(x-a)(x-b) \geq 0$ und $b > a$):

$$
\begin{aligned}
x &:= \frac{(z+(b-a)/4)^2}{z} + a, \qquad z \leq -\frac{b-a}{4} \text{ oder } z > \frac{b-a}{4}, \\
dx &= \frac{(4z+a-b)(4z+b-a)}{16z^2}\, dz \\
\sqrt{(x-a)(x-b)} &= \frac{(4z+a-b)(4z+b-a)}{16|z|}.
\end{aligned}
$$

(c) Wir behandeln nun zwei Spezialfälle von (b), für die andere Substitutionen eleganter sind:

$$
\int dx\, \frac{1}{\sqrt{1-a^2x^2}} \qquad \text{mit } a > 0, -1 < ax < 1
$$

Substitution:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{a}\sin t, \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\
dx &= \frac{\cos t}{a}\, dt, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-a^2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{1}{\cos t} \\
\Rightarrow \quad \int dx\, \frac{1}{\sqrt{1-a^2x^2}} &= \frac{1}{a}\int dt = \frac{t}{a} + C \\
&= \frac{\arcsin(ax)}{a} + C
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Lösen wir nun für den Spezialfall $a = 1$ das Integral mit der Euler-Substitution, so finden wir stattdessen

$$
\begin{aligned}
t &= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} > 1, \qquad x = \frac{t^2-1}{t^2+1} = 1 - \frac{2}{t^2+1} \\
\Rightarrow \quad dx &= \frac{4t}{(1+t^2)^2} dt \quad \text{und} \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}
\end{aligned}
$$

Also:

$$\begin{aligned}\int dx\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \;&=\; 2\int dt\,\frac{1}{1+t^2}\\
&\overset{\text{Partialbruchz.}}{=} \int dt\left(\frac{i}{t+i}-\frac{i}{t-i}\right)\\
&=\; i\left[\ln(t+i)-\ln(t-i)\right]+C\\
&=\; i\ln\frac{t+i}{t-i}+C' \;=\; i\ln\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+i}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-i}+C' \qquad (40)\\
&\uparrow\end{aligned}$$

erlaubt, weil $t>0$

Durch Vergleich von Gl. (39) und (40) finden wir

$$\begin{aligned}\arcsin x = i\ln\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+i}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-i}+C'-C\\
=\; i\ln\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)+C'-C\end{aligned}$$

Durch Betrachten des Limes $x\to -1$ findet man zudem

$$\begin{aligned}&-\frac{\pi}{2} = \arcsin(-1) \;=\; i\ln(-1)+C'-C \;=\; -\pi+C'-C\\
&\Rightarrow \qquad C'-C=\frac{\pi}{2}\\
&\text{also}\quad \arcsin x \;=\; i\ln\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)+\frac{\pi}{2} \qquad (41)\end{aligned}$$

D.h. man kann nicht nur $\sin x$ durch komplexe Exponentialfunktionen ausdrücken, sondern auch $\arcsin x$ durch den komplexen Logarithmus!

Der andere Spezialfall ist das Integral

$$\int dx\,\frac{1}{\sqrt{1+a^2x^2}}, \qquad \text{mit } a>0$$

Substitution: $x = \frac{1}{a}\sinh t$. Wegen $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ (was man einfach mit Gl. (31) nachrechnet) ist also

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+a^2x^2} = \cosh t, \qquad dx &= \frac{1}{a}\cosh t\, dt \\
\int dx\, \frac{1}{\sqrt{1+a^2x^2}} &= \frac{1}{a}\int dt\, \frac{\cosh t}{\cosh t} = \frac{1}{a}\int dt \\
&= \frac{t}{a} + C = \frac{1}{a}\mathrm{arsinh}\,(ax) + C. \qquad (42)
\end{aligned}$$

Substituiert man stattdessen $s = a^2x^2$ und danach $z = \sqrt{\frac{s}{1+s}}$, so findet man nach mehreren Schritten (analog zum ersten Spezialfall)

$$\int dx\, \frac{1}{\sqrt{1+a^2x^2}} = \frac{1}{a}\ln\left(ax + \sqrt{1+a^2x^2}\right) + C' \qquad (43)$$

und mit $a = 1$ aus Gl. (42) und (43);

$$\mathrm{arsinh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),$$

wobei $C' - C$ z.B. durch Betrachten von $x = 0$ bestimmt wurde.

(d) $\int dx\, R(\sin x, \cos x)$ kann mit der Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$ (also $x = 2\arctan t$) gelöst werden:

Dazu betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned}
\tan y &= \frac{\sin y}{\cos y} \\
\Rightarrow \quad \frac{d\,\tan y}{dy} &= \sin y \frac{d}{dy}\frac{1}{\cos y} + \frac{1}{\cos y}\frac{d}{dy}\sin y \\
&= \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + 1 = \frac{1}{\cos^2 y} \\
\Rightarrow \quad \frac{d\,\arctan t}{dt} &= \cos^2 y\Big|_{y=\arctan t} \\
&= \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y}\Bigg|_{y=\arctan t} = \frac{1}{1+\tan^2 y}\Bigg|_{y=\arctan t} \\
&= \frac{1}{1+t^2} \qquad (44)
\end{aligned}$$

Also $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$ und weiter:

$$\sin x \stackrel{(29)}{=} 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \tag{45}$$

$$\cos x \stackrel{(29)}{=} \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{46}$$

Damit haben wir unser Ziel erreicht:

$$\int dx\, R(\sin x, \cos x) = 2\int dt\, \underbrace{\frac{1}{1+t^2}\, R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}_{\text{rationale Funktion}} \tag{47}$$