1.2.6 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Gesucht: Funktion $y(t)$, die eine Gleichung

$$F(\frac{d^n y}{dt^n}, \ldots, \frac{dy}{dt}, y, t) = 0 \tag{48}$$

erfüllt. Gl. (48) heißt gewöhnliche Differentialgleichung (DGL). Dabei bedeutet *gewöhnlich*, dass nur eine unabhängige Variable t vorkommt. n ist die Ordnung der DGL in Gl. (48). Eine DGL heißt homogen, wenn mit einer Lösung $y(t) \neq 0$ auch $\lambda y(t)$ mit beliebigem $\lambda \in \mathbb{C}$ Lösung der DGL in Gl. (48) ist. Eine lineare DGL enthält keine höheren Potenzen von y, $\frac{d^k y}{dt^k}$ als 1 und lässt sich somit so schreiben:

$$\underbrace{a_n(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{o.B.d.A.: } a_n(t)=1}} \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0 y \;=\; g(t) \tag{49}$$

mit vorgegebenen Funktionen $a_0(t) \ldots a_n(t)$, $g(t)$. Ist $g(t) \equiv 0$, so ist Gl. (49) auch homogen.

Beispiel:

$$\dot{y} = \alpha y, \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \tag{50}$$

ist eine homogene, lineare DGL 1. Ordnung.

Lösung:

$$\begin{aligned} \int dt\, \frac{\dot{y}}{y} &= \alpha \int dt \\ \Rightarrow \quad \ln y &= \alpha t + C' \\ y(t) &= \underbrace{e^{C'}}_{C} e^{\alpha t} \\ &= C e^{\alpha t} \qquad \text{mit } C \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{51}$$

D.h. wir haben eine Schar von Lösungen, die von einem freien Parameter C (einer Integrationskonstante) abhängen. Sind $a_0, \dots a_n$ unabhängig von der Zeit, so spricht man von einer DGL mit konstanten Koeffizienten. Die Lösungsschar einer DGL n-ter Ordnung hat n unabhängige Parameter $C_1, \dots C_n$.

Für eine lineare homogene DGL gilt das Superpositionsprinzip: Mit $y_1(t)$ und $y_2(t)$ ist auch

$$\lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$$

eine Lösung. (Beweis: Einsetzen in Gl. (49).) Die Lösungsschar hat die Form

$$C_1 y_1(t) + \dots C_n y_n(t), \tag{52}$$

wobei $y_1(t), \dots y_n(t)$ linear unabhängige Lösungen sind. (Linear unabhängig bedeutet, dass man keine Konstanten $\alpha_1 \dots \alpha_n$ finden kann, so dass $\alpha_1 y_1(t) + \dots \alpha_n y_n(t) \equiv 0$, also gleich der Nullfunktion ist.)

Schwingungsdifferentialgleichung:

$$\text{Rückstellkraft } F = -ky$$

$$m\ddot{y} \;=\; -ky, \qquad m, k > 0, \qquad \text{Schwingungsdifferentialgleichung} \tag{53}$$

m ist die Masse des schwingenden Teilchens, k die Federkonstante. Trick:

$$\begin{aligned}
m\dot{y}\ddot{y} &= -k\dot{y}y \\
\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\dot{y}^2 &= -\frac{k}{2}\frac{d}{dt}y^2 \\
\frac{m}{2}\dot{y}^2 &= -\frac{k}{2}y^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Integrationskonstante } C_1}}{E},
\end{aligned} \tag{54}$$

Lösungen mit reellen Funktionen $y(t)$ kann es nur für $E > \frac{k}{2}y^2$ geben.

$$\begin{aligned}
\frac{m}{2}\frac{\dot{y}^2}{E - \frac{k}{2}y^2} &= 1 \\
\pm\sqrt{\frac{m}{2E}}\int dt \frac{\dot{y}}{\sqrt{1-\frac{k}{2E}y^2}} &= \int dt
\end{aligned}$$

Mit $dy = \dot{y}dt$ erkennen wir das Integral aus Gl. (39)!

$$\pm\sqrt{\frac{m}{2E}}\sqrt{\frac{2E}{k}}\,\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}y\right) = t \underbrace{-t_0}_{\text{zweite Integrationskonstante } C_2}$$

$$\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}y\right) = \omega(t-t_0),$$

wo wir die Parameter k und m zu

$$\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \text{Eigen(kreis)frequenz} \tag{55}$$

zusammengefasst haben. Die Lösung ist also

$$y(t) = A\sin\left[\omega(t-t_0)\right] \tag{56}$$

$$\hookrightarrow \text{ Amplitude } A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

E ist die Energie der schwingenden Masse, in Gl. (54) ist sie als Integrations<u>konstante</u> aufgetreten.

Energieerhaltung!

Alternativ zu Gl. (56):

$$
\begin{aligned}
\sin(\omega t - \omega t_0) &\overset{(29)}{=} \cos(\omega t_0)\sin(\omega t) - \sin(\omega t_0)\cos(\omega t) \\
\lambda &:= A\cos(\omega t_0), \qquad \mu := -A\sin(\omega t_0) \\
y(t) &= \lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t) \qquad (57)
\end{aligned}
$$

$$\uparrow \qquad \nearrow$$

unabhängige Lösungen

Für $\lambda = \pm i\mu$ findet man die Lösungen

$$\mu = A_1: \qquad y_1 = A_1\left[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right] = A_1 e^{i\omega t} \qquad (58a)$$

$$\mu = A_2: \qquad y_2 = A_2\left[\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right] = A_2 e^{-i\omega t} \qquad (58b)$$

Eine Standardmethode zur Lösung von Gl. (53) ist die Verwendung des <u>Ansatzes</u>

$$y = Ae^{i\tilde{\omega}t} \qquad (59)$$

Einsetzen von Gl. (59) in Gl. (53):

$$
\begin{aligned}
mA\,(i\tilde{\omega})^2\, e^{i\tilde{\omega}t} &= -kAe^{i\tilde{\omega}t} \\
\Leftrightarrow \qquad m\tilde{\omega}^2 &= k \\
\Leftrightarrow \qquad \tilde{\omega} &= \pm\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (60)
\end{aligned}
$$

Superpositionsprinzip:

$$y(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \qquad (61)$$

Mit $\mu = A_1 + A_2$ und $\lambda = A_1 - A_2$ findet man Gl. (57).

Zurück zu DGL 1. Ordnung:

- DGL des Typs

$$\dot{y} = f(t)g(y) \tag{62}$$

kann man durch Separation der Variablen lösen:

$$\begin{aligned} G(y) := \int \frac{\dot{y}}{g(y)} &= \int dt\, f(t) \\ y &= G^{-1}\left(\int dt\, f(t)\right) \\ &\qquad\qquad \uparrow \end{aligned}$$

Notation enthält Integrationskonstante

- Lineare DGL erster Ordnung (mit $h(t) = \dfrac{a_0(t)}{a_1(t)}$, $f(t) = \dfrac{g(t)}{a_1(t)}$),

$$\dot{y} + h(t)y = f(t) \tag{63}$$

löst man so:

$$(\dot{y} + h(t)y)\; e^{\int_{t_0}^{t} ds\, h(s)} = f(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} ds\, h(s)}$$

Produktregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(y\, e^{\int_{t_0}^{t} ds\, h(s)}\right) &= f(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} ds\, h(s)} \\ y\, e^{\int_{t_0}^{t} ds\, h(s)} &= \int dt f(t) e^{\int_{t_0}^{t} ds\, h(s)} \\ y(t) &= e^{-\int_{t_0}^{t} ds\, h(s)} \int dt f(t) e^{\int_{t_0}^{t} ds\, h(s)} \end{aligned} \tag{64}$$

Die Lösung hat aus $\int dt\, f(t) \ldots$ eine Integrationskonstante C, in die t_0 absorbiert werden kann; d.h. es gibt nur eine Integrationskonstante, nicht zwei (t_0 und C).