2 Kinematik

2.1 Bewegung eines Massenpunktes

Idealisierung: Ausdehnung des bewegten Körpers wird vernachlässigt (Massenpunkt).

<u>Ortsvektor</u> $\vec{r}$

Ein Koordinatensystem mit rechtwinkligen Achsen definiert <u>kartesische Koordinaten</u>

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{65}$$

Darstellung des Ortvektors: Pfeil vom Ursprung O des Koordinatensystems zum Ort $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ des Massenpunktes.

<u>n-Tupel</u>:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow n \text{ Zahlen. Es kommt auf die Reihenfolge an!} \\ \swarrow \end{array}$$

Die Menge der $\left\{ \begin{array}{c} \text{reellen} \\ \text{komplexen} \end{array} \right\}$ n-Tupel ist $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{C}^n \end{array} \right\}$.

D.h. $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$; $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist <u>Spaltenvektor</u>. Die <u>Transposition</u> eines Spaltenvektors liefert einen <u>Zeilenvektor</u> $\vec{r}^T = (x, y, z)$.

$\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind <u>Euklidische Vektorräume</u>:

- $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n \quad \Rightarrow \quad$ Linearkombination $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \in \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$, wobei mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \ := \ \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 \\ \lambda a_3 + \mu b_3 \end{pmatrix}$$

Konsequenzen:

Kommutativgesetz, Existenz eines Nullvektors $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Skalarprodukt für $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \ := \ \vec{a}^T b \ := \ \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \tag{66}$$

  - Länge oder Norm:

$$|\vec{a}| \ := \ \sqrt{\vec{a}^2} \ = \ \sqrt{\vec{a}^T \vec{a}} \ = \ \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j a_j} \tag{67}$$

  - Winkel $\theta(\vec{a}, \vec{b})$ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \ =: \ |\vec{a}|\,|\vec{b}| \, \cos\theta(\vec{a}, \vec{b}) \qquad \text{mit } 0 \leq \theta(\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi \tag{68}$$

Um Gl. (68) zu verstehen, betrachten wir

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left[(\vec{a} + \vec{b})^2 - \vec{a}^2 - \vec{b}^2 \right] \ = \ \frac{1}{2} \left[|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \right].$$

Der letzte Ausdruck auf der rechten Seite enthält die Längen von drei Vektoren. Die Länge eines Vektors hängt nicht von der Wahl des Koordinatensystem ab. Wenn wir die x-Achse in Richtung von $\vec{a}$ und die z-Achse senkrecht zur von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene legen, dann ist $\vec{a} = |\vec{a}|(1, 0, 0)^T$ und $\vec{b} = |\vec{b}|(\cos\phi, \sin\phi, 0)^T$ (ebene Polarkoordinaten!), wobei $\phi = \theta(\vec{a}, \vec{b})$ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist. Also

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \overset{(66)}{=} (|\vec{a}|, 0, 0) \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cos\theta(\vec{a}, \vec{b}) \\ |\vec{b}| \sin\theta(\vec{a}, \vec{b}) \\ 0 \end{pmatrix} \ = \ |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta(\vec{a}, \vec{b})$$

wie in Gl. (68) behauptet.

Bahnkurve: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Die Zeit t ist ein Kurvenparameter, wir können die verschiedenen Punkte mit dem Zeitpunkt t kennzeichnen, zu dem der Massenpunkt den Ort $\vec{r}(t)$ durchlaufen hat.

Beispiel: Wurfparabel

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x t \\ 0 \\ -g\frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$

Geschwindigkeitsvektor: $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t)$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \tag{69}$$

Limes komponentenweise definiert; d.h. $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$.

Weglänge oder Bogenlänge:

$$\underbrace{\underbrace{s(t,t_0)}}_{\text{Kilometerzähler}} = \int_{t_0}^{t} d\tau \, \underbrace{\underbrace{|\dot{\vec{r}}(\tau)|}}_{\text{Tachoanzeige}} \tag{70}$$

Umkehrfunktion $t(s)$ zu $s(t,t_0)$:

$$\vec{r}_s(s) := \vec{r}(t(s))$$

ist eine andere Parameterdarstellung der Kurve, nun kennzeichnet die Weglänge s zwischen $\vec{r}_s(0) = \vec{r}(t_0)$ und $\vec{r}_s(s) = \vec{r}(t)$ den betrachten Punkt auf der Bahnkurve. (s steht auf Kilometersteinen an Straßen.)

Tangentenvektor:

$$\begin{aligned} \vec{t}(s) &= \frac{d\vec{r}_s}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} \\ &= \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} \end{aligned} \tag{71}$$

Nicht mit der Zeit verwechseln!

Also $|\vec{t}(s)| = 1$ und $\vec{r}_s \propto \vec{v}$ ist tangential zur Bahnkurve.

$$\vec{v}_s(s) := \vec{v}(t(s)) = \frac{d\vec{r}_s}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{t}(s)\, v(t) \tag{72}$$

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) := \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) \tag{73}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= \frac{d}{dt}|\vec{v}(t)| = \frac{v_x\dot{v}_x + v_y\dot{v}_y + v_z\dot{v}_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} \\ &= \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v} \end{aligned} \tag{74}$$

Achtung: I.A. $a(t) = |\vec{a}(t)| = |\dot{\vec{v}}| \neq \frac{d}{dt}|\vec{v}(t)| = \dot{v}(t)$. ($a(t) = \dot{v}(t)$ gilt nur, wenn $\vec{a} \propto \vec{v}$, also $\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v} = a$ ist.)

$\vec{a}$ als Funktion der Bogenlänge:

$$\begin{aligned}\vec{a}_s(s) &= \vec{a}(t(s)) \\ &= \frac{d\vec{v}(s(t))}{dt} \overset{(72)}{=} \frac{d}{dt}\left[\vec{t}(s)|\vec{v}(t)|\right] \\ &= \dot{\vec{t}}\,v(t) \;+\; \vec{t}\,\dot{v}(t) \end{aligned} \tag{75}$$

wegen $1 \overset{(71)}{=} |\vec{t}\cdot\vec{t}|$ ist

$$0 \;=\; \frac{d}{dt}\left(\vec{t}\cdot\vec{t}\right) \;=\; 2\,\vec{t}\cdot\dot{\vec{t}}, \tag{76}$$

denn es gilt die Produktregel

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) &= \frac{d}{dt}\left(a_1b_1 + a_2b_s + a_3b_3\right) \\ &= \dot{a}_1b_1 + \dot{a}_2b_2 + \dot{a}_3b_3 + a_1\dot{b}_1 + a_2\dot{b}_2 + a_3\dot{b}_3 \\ &= \dot{\vec{a}}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\dot{\vec{b}} \end{aligned} \tag{77}$$

Gl. (76) bedeutet, dass $\dot{\vec{t}}$ auf $\vec{t}$ senkrecht steht. Damit folgt aus Gl. (75):

$$|\vec{a}|^2 \;=\; |\dot{\vec{t}}|^2v^2 \;+\; |\dot{v}|^2 \tag{78}$$

Man sieht an Gl. (78), dass tatsächlich $|\vec{a}| \neq |\dot{v}|$, außer es gilt $\dot{\vec{t}} = 0$, der Massenpunkt durch die Beschleunigung also nicht seine Richtung ändert.