In Gl. (75) beschreibt

$$\vec{a}_\perp := \dot{\vec{t}}\, v$$

die Zentripetalbeschleunigung, deren ausschließlicher Effekt die Änderung der Bewegungsrichtung ist, und

$$\vec{a}_\parallel := \vec{t}\, \dot{v}$$

die Beschleunigung in Bewegungsrichtung, deren ausschließlicher Effekt die Änderung von $|\vec{v}|$ (also die Änderung der „Tachoanzeige") ist.

$$\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel$$

mit $\vec{a}_\perp \cdot \vec{a}_\parallel = 0$. Eliminieren wir mit Gl. (71) den Tangentenvektor, so finden wir

$$\begin{aligned} \vec{a}_\parallel &= \frac{\dot{v}}{v}\, \vec{v} \\ \vec{a}_\perp &= \vec{a} - \vec{a}_\parallel = \dot{\vec{v}} - \frac{\dot{v}}{v}\, \vec{v} \end{aligned} \tag{79}$$

Beispiel: Wurfparabel

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} v_x t \\ 0 \\ -g\frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) &= \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + g^2 t^2} \\ \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad a(t) = |\vec{a}(t)| = g \end{aligned}$$

$$
\dot{v}(t) \overset{(74)}{=} \frac{\vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t)}{v(t)} = \frac{g^2 t}{v} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_x^2 + g^2 t^2}} \qquad \begin{cases} = 0 & \text{für } t = 0 \\ \to g & \text{für } t \to \infty \end{cases}
$$

$$
\vec{a}_\parallel \overset{(79)}{=} \frac{g^2 t}{v^2}\,\vec{v}
$$

$$
\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - \frac{g^2 t}{v^2} \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix}
$$

$$
\vec{a}_\perp = \frac{g v_x}{v^2} \begin{pmatrix} -gt \\ 0 \\ -\frac{v^2}{v_x} + \frac{g^2 t^2}{v_x} \end{pmatrix} = \frac{g v_x}{v^2} \begin{pmatrix} -gt \\ 0 \\ -v_x \end{pmatrix}
$$

steht senkrecht auf $\vec{v}$!

$$
\vec{a}_\parallel \xrightarrow[t\to\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}
$$

$$
|\vec{a}_\parallel| = \frac{g^2 t}{v} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_x^2 + g^2 t^2}} \qquad \begin{cases} = 0 & \text{für } t = 0 \\ \to g & \text{für } t \to \infty \end{cases}
$$

$$
|\vec{a}_\perp| = g\,\frac{v_x}{v} = \frac{g v_x}{\sqrt{v_x^2 + g^2 t^2}} \qquad \begin{cases} = g & \text{für } t = 0 \\ \to 0 & \text{für } t \to \infty \end{cases}
$$

D.h. für $t \to \infty$ geht der Wurf in einen freien Fall über.

2.2 Krummlinige Koordinaten

Die Einheitsvektoren (oder Basisvektoren) unseres kartesischen Koordinatensystems hängen nicht von $\vec{r}$ ab:

$$
\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{80}
$$

$$
\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z
$$

Bei krummlinigen Koordinaten ist das nicht so.

2.3 Ebene Polarkoordinaten und Zylinderkoordinaten

$$
\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{rcl} x &=& r\cos\phi \\ y &=& r\sin\phi \end{array}\right\} \text{ ebene Polarkoordinaten} \\ \begin{array}{rcl} z &=& z \end{array} \end{array}\right\} \text{ Zylinderkoordinaten} \tag{81}
$$

Übliche Wahl: $-\pi < \phi \leq \pi$

Umkehrung von Gl. (81):

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2} \geq 0 && \text{(82a)} \\
\phi &= \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für} \quad x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = 0, y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{für} \quad x < 0, y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{für} \quad x < 0, y > 0 \end{cases} && \text{(82b)}
\end{aligned}
$$

Partielle Ableitung: Ist $f(x,y,z)$ eine Funktion mehrerer Variablen, so bedeutet

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{die Ableitung von } f \text{ nach } x \text{ für konstante } y,\ z.$$

Die Kettenregel impliziert

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f\left(x(t), y(t), z(t)\right) &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\dot{x} \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}\,\dot{y} \;+\; \frac{\partial f}{\partial z}\,\dot{z} \\
&= \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} f
\end{aligned}
$$

mit dem <u>Gradienten</u>

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

<u>Nabla-Operator</u>

Die Gleichung $f(x,y,z)$ =const. definiere eine Fläche im $\mathbb{R}^3$. (Beispiel: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = R^2$ definiert die Oberfläche einer Kugel mit Radius R.) Parametrisiert $\vec{r}(t)$ eine beliebige Bahnkurve in dieser Fläche, so ist $\frac{d}{dt} f(x(t),(y(t),z(t)) = 0 = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} f$, was bedeutet, dass $\vec{\nabla} f$ senkrecht auf dieser Kurve steht. Da $\vec{\nabla} f$ senkrecht auf *allen* solchen Kurven steht, steht $\vec{\nabla} f$ also senkrecht auf der Fläche $f(x, y, z) = \text{const.}$

Die Einheitsvektoren der kartesischen Koordinaten aus Gl. (79) erfüllen

$$\vec{e}_x = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\right|} \quad \text{usw.}$$

Wir definieren Einheitsvektoren analog für krummlinige Koordinaten. Für die Zylinderkoordinaten in Gl. (81):

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right|} \stackrel{(81)}{=} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right| = 1 \tag{83}$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right|} \stackrel{(81)}{=} \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right| = r \tag{84}$$

$$\vec{e}_z = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right|} \stackrel{(81)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Basisvektoren der Zylinderkoordinaten stehen paarweise senkrecht aufeinander und sind normiert:

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\phi = \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = 0 \tag{85a}$$

$$|\vec{e}_r| = |\vec{e}_\phi| = |\vec{e}_z| = 1 \tag{85b}$$

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ ist ein rechtshändiges Koordinatensystem. Wir finden

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix} = r\,\vec{r} + z\vec{e}_z \tag{86}$$

Hier tritt kein $\vec{e}_\phi$ auf!

Geschwindigkeit in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}\left(r\,\vec{e}_r + \vec{e}_z\right) \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r + \dot{z}\vec{e}_z \end{aligned} \tag{87}$$

Neu im Vergleich zu kartesischen Koordinaten:

$$\dot{\vec{e}}_r \overset{(83)}{=} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dot\phi\sin\phi\\ \dot\phi\cos\phi\\ 0\end{pmatrix} = \dot\phi\,\vec{e}_\phi \tag{88}$$

$$\dot{\vec{e}}_\phi \overset{(84)}{=} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dot\phi\cos\phi\\ -\dot\phi\sin\phi\\ 0\end{pmatrix} = -\dot\phi\,\vec{e}_r \tag{89}$$

Aus Gl. (87) wird

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot r\vec{e}_r + r\dot\phi\vec{e}_\phi + \dot z\vec{e}_z\\ &= v_r\vec{e}_r + v_\phi\vec{e}_\phi + v_z\vec{e}_z\end{aligned} \tag{90}$$

$v_r = \dot r$	heißt radiale Geschwindigkeit (oder Radialgeschwindigkeit)
$v_\phi = r\dot\phi$	heißt zirkulare oder azimutale Geschwindigkeit

Empfehlung: Buch von Kirchgessner und Schreck.

Beschleunigung:

$$\begin{aligned}\vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \frac{d}{dt}\left(\dot r\,\vec{e}_r + r\dot\phi\,\vec{e}_\phi + \dot z\,\vec{e}_z\right)\\ &= \ddot r\vec{e}_r + \dot r\dot{\vec{e}}_r + \dot r\dot\phi\vec{e}_\phi + r\ddot\phi\vec{e}_\phi + r\dot\phi\vec{e}_\phi + r\dot\phi\dot{\vec{e}}_\phi + \ddot z\vec{e}_z\\ &= \underbrace{\left(\ddot r - r\dot\phi^2\right)}_{a_r}\vec{e}_r + \underbrace{\left(2\dot r\dot\phi + r\ddot\phi\right)}_{a_\phi}\vec{e}_\phi + \ddot z\vec{e}_z\end{aligned} \tag{91}$$

mit radialer Beschleunigung a_r und zirkularer (azimutaler) Beschleunigung a_ϕ. $a_r\vec{e}_r$ heißt auch Zentripetalbeschleunigung.