2.2.2 Kugelkoordinaten

$\uparrow$

Projektion von $\vec{r}$ in die (x, y)-Ebene. Diese Projektion hat die Länge $r \sin\theta$.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{92}$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \tag{93a}$$

$$\text{mit} \quad \vec{e}_r = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{93b}$$

θ mit $0 \le \theta \le \pi$ heißt Polarwinkel, ϕ mit $-\pi < \phi \le \pi$ heißt Azimutwinkel.

$$\vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|} \overset{(93)}{=} \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \tag{94}$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right|} \overset{(93)}{=} \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{95}$$

Dabei wurde $\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right| = r$ und $\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right| = r\sin\theta$ verwendet. Die Basisvektoren $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ stehen paarweise senkrecht aufeinander und bilden ein rechtshändiges Koordinatensystem.

Längengrad: Halbkreis definiert durch $r =$const., $\phi =$const. und $\theta \in [0, \pi]$.

Breitenkreis: Kreis definiert durch $r =$const., $\theta =$const. und $\phi \in [-\pi, \pi]$.

$\vec{e}_r$ steht senkrecht auf der Kugeloberfläche („Sphäre“) mit r =const.

$\vec{e}_\theta$ steht senkrecht auf dem Breitenkreis (mit θ =const.) und ist tangential zum Längengrad.

$\vec{e}_\phi$ steht senkrecht auf dem Längengrad (mit ϕ =const.) und ist tangential zum Breitenkreis.

Umkehrung von Gl. (92):

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &\phi \text{ wie in Eq. (82)} \end{aligned} \tag{96}$$

Erde $\simeq$ Kugel, wobei die z-Achse den geographischen

Süd- und Nordpol durchsticht.

$\uparrow$ $\qquad\qquad\qquad$ $\nwarrow$

$z=-R$ $\qquad\qquad$ $z=R$ =Erdradius.

Greenwich-Meridian: $\phi=0$. Wir zählen $\phi>0$ für Punkte <u>östlicher</u> Länge und $\phi<0$ für Punkte <u>westlicher</u> Länge. $\vec{e}_\phi$ zeigt in Richtung Osten, die Erde dreht sich in Richtung $\vec{e}_\phi$ (Rechte-Hand-Regel, Daumen zum Nordpol).

$\theta=\frac{\pi}{2}=90^\circ$ definiert den <u>Äquator</u>. In der Geographie vewendet man

$$\theta_B = 90^\circ - \theta,$$

wobei $\theta_B>0$ der <u>nördlichen Breite</u> entspricht, während $\theta_B<0$ die <u>südliche Breite</u> bezeichnet.

Karlsruhe (Schloss), „GPS-Koordinaten“:

$$\begin{aligned} \theta_B &= 49^\circ\, 0'\, 48{,}647'' = 49{,}013513^\circ \\ \Rightarrow \qquad \theta &= 40{,}986487^\circ = 0{,}22770271\,\pi = 0{,}71534915 \\ \phi &= 8^\circ\, 24'\, 15{,}966'' = 8{,}404435^\circ \\ &= 0{,}04669131\,\pi = 0{,}14668506 \end{aligned}$$

Für $\vec{v}$ und $\vec{a}$ brauchen wir:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot\theta\cos\theta\cos\phi - \dot\phi\sin\theta\sin\phi \\ \dot\theta\cos\theta\sin\phi + \dot\phi\sin\theta\cos\phi \\ -\dot\theta\sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \dot\theta\,\vec{e}_\theta + \dot\phi\,\sin\theta\,\vec{e}_\phi \end{aligned} \tag{97}$$

Wie rechnet man die Koeffizienten 0, $\dot\theta$ und $\dot\phi\sin\theta$ von $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ aus? Wegen $0 = \frac{d}{dt}1 = \frac{d}{dt}\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r = 2\vec{e}_r\dot{\vec{e}}_r$ ist $\dot{\vec{e}}_r \perp \vec{e}_r$, also $\dot{\vec{e}}_r = a\,\vec{e}_\theta + b\,\vec{e}_\phi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Trick:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r\cdot\vec{e}_\theta &= a\,\underbrace{\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_\theta}_{=1} + b\,\underbrace{\vec{e}_\phi\cdot\vec{e}_\theta}_{=0} \\ &= a \end{aligned}$$

und ebenso $\dot{\vec{e}}_r\cdot\vec{e}_\phi = b$. Beispielhaft:

$$\begin{aligned} b = \dot{\vec{e}}_r\cdot\vec{e}_\phi &= \left(\dot\theta\cos\theta\cos\phi - \dot\phi\sin\theta\sin\phi\right)(-\sin\phi) \\ &\quad + \left(\dot\theta\cos\theta\sin\phi + \dot\phi\sin\theta\cos\phi\right)\cos\phi \\ &= \dot\phi\sin\theta\,\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right) = \dot\phi\,\sin\theta \end{aligned}$$

Analog zu Gl. (97) findet man:

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\,\dot\theta\,\vec{e}_r + \dot\phi\,\cos\theta\,\vec{e}_\phi \tag{98a}$$

$$\dot{\vec{e}}_\phi = -\,\dot\phi\,(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta) \tag{98b}$$

Geschwindigkeit:

$$
\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \dot{\vec{r}}(t) \;=\; \dot{r}\,\vec{e}_r \;+\; r\,\dot{\vec{e}}_r \\
&= \underbrace{\dot{r}}_{\substack{v_r(t) \\ \text{radiale,}}}\,\vec{e}_r \;+\; \underbrace{r\,\dot{\theta}}_{\substack{v_\theta(t) \\ \text{polare,}}}\,\vec{e}_\theta \;+\; \underbrace{r\,\sin\theta\,\dot{\phi}}_{\substack{v_\phi(t) \\ \text{azimutale Geschwindigkeit}}}\,\vec{e}_\phi
\end{aligned}
\tag{99}
$$

Beschleunigung:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}(t) &= \dot{\vec{v}}(t) \;=\; \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{e}_r \;+\; r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \;+\; r\sin\theta\,\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi\right) \\
&= \left[\ddot{r} - r\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\right]\,\vec{e}_r \\
&\quad + \left[2\,\dot{r}\,\dot{\theta} \;+\; r\left(\ddot{\theta} \;-\; \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\sin(2\theta)\right)\right]\,\vec{e}_\theta \\
&\quad + \left[2\,\dot{r}\,\dot{\phi}\sin\theta \;+\; r\,\left(2\,\dot{\theta}\,\dot{\phi}\cos\theta \;+\; \ddot{\phi}\sin\theta\right)\right]\,\vec{e}_\phi \\
&=: \underbrace{a_r(t)}_{\text{radiale,}}\,\vec{e}_r \;+\; \underbrace{a_\theta(t)}_{\text{polare,}}\,\vec{e}_\theta \;+\; \underbrace{a_\phi(t)}_{\text{azimutale}}\,\vec{e}_\phi \quad \text{Beschleunigung}
\end{aligned}
\tag{100}
$$

2.3 Drehungen

Oft muss man eine in einem Koordinatensystem Σ definierte Bewegung in einem anderen Korordinatensystem Σ' beschreiben, das gegen Σ gedreht ist. Beispiel: Drehung um z-Achse: $\vec{r}$ und $\vec{r}\,'$ beschreibe denselben Punkt, wobei

$$
\vec{r} \;=\; x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z \qquad \text{und} \quad \vec{r}\,' \;=\; x'\,\vec{e}_x{}' + y'\,\vec{e}_y{}' + z\,\vec{e}_z{}'
$$

ist.

$$
\left.\begin{matrix}\Sigma \\ \Sigma'\end{matrix}\right\} \text{ ist durch } \left\{\begin{matrix}\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \\ \vec{e}_x{}', \vec{e}_y{}', \vec{e}_z{}'\end{matrix}\right\} \text{ definiert.}
$$

Im Beispiel (siehe Zeichnung):

$$x' = x \cos\phi + y \sin\phi \tag{101a}$$

$$y' = -x \sin\phi + y \cos\phi \tag{101b}$$

$$z' = z \tag{101c}$$

Matrix-Schreibweise: $m \times n$-Matrix B:

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}}_{\overbrace{n \text{ Spalten}}} \begin{array}{l} \nwarrow \\ \leftarrow \; m \text{ Zeilen} \\ \swarrow \end{array}$$

Die Menge aller $\left\{ \begin{array}{c} \text{reellen} \\ \text{komplexen} \end{array} \right\}$ $m \times n$-Matrizen ist $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^{m \times n} \\ \mathbb{C}^{m \times n} \end{array} \right\}$.

Spaltenvektoren:

$$\vec{b}_k := \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix} \tag{102}$$

$$\Rightarrow \quad B = \left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots \vec{b}_n \right).$$

Multiplikation einer $m \times n$-Matrix mit einem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} B\,\vec{a} &:= a_1 \vec{b}_1 + a_2 \vec{b}_2 + \dots a_n \vec{b}_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \vec{b}_k, \end{aligned} \tag{103}$$

was eine Linearkombination der Spalten ist. Also

$$B\,\vec{a} := \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_2 b_{12} & \dots & a_n b_{1n} \\ a_1 b_{21} & a_2 b_{22} & \dots & a_n b_{2n} \\ \vdots & \dots & & \vdots \\ a_1 b_{m1} & a_2 b_{m2} & \dots & a_n b_{mn} \end{pmatrix}$$

Wir beschränken uns nun auf quadratische Matrizen, d.h. auf den Fall $m = n$. (In der Mechanik genügen zudem die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.) Matrix-Multiplikation:

$$B\,C \;:=\; B\,(\vec{c}_1, \dots \vec{c}_n) \;=\; (B\,\vec{c}_1, \dots, B\,\vec{c}_n) \tag{104}$$

D.h. die k-te Spalte von $B\,C$ ist gerade $B\,\vec{c}_k$. In Komponenten:

$$B \;=\; (b_{jk})\,, \qquad C \;=\; (c_{kl})\,,$$

$$\nearrow \quad \nwarrow$$

Zeilenindex Spaltenindex

$$\underbrace{\underbrace{[B\,C]_{jl}}}_{\text{Element in der } j\text{-ten Zeile und } l\text{-ten Spalte von } B\,C.} \;\stackrel{(104,103)}{=}\; \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\,c_{kl} \tag{105}$$

Mit den Zeilenvektoren $\vec{\beta}_j^{\,T} := (b_{j1}, b_{j2}, \dots b_{jn})$ ist

$$B \;=\; \begin{pmatrix} \vec{\beta}_1 \\ \vec{\beta}_2 \\ \vdots \\ \vec{\beta}_n \end{pmatrix}$$

und Gl. (105) liest sich als

$$[B\,C]_{jl} \;=\; \vec{\beta}_j^{\,T}\,\vec{c}_l \tag{106}$$

Merkregel für Matrixmultiplikation: „Zeile mal Spalte“.

Assoziativgesetz:

$$(B\,C)\;D \;= B\,(C\,D) \;=:\; B\,C\,D$$

$$(B\,C)\;\vec{a} \;= B\,(C\,\vec{a}) \;=:\; B\,C\,\vec{a}$$

Aber: I.A. ist $A\,B \;\neq\; B\;A$!