Die <u>Spur</u> einer $n \times n$-Matrix $M = (m_{jk})$ ist

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{trace}}}{\operatorname{tr} M} \;:= \operatorname{Sp} M \;:= \sum_{j=1}^{n} m_{jj} \tag{133}$$

Rechenregeln für Spuren:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A+B) &= \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B \\
\operatorname{tr}(\lambda A) &= \lambda \operatorname{tr} A \qquad \text{für } \lambda \in \mathbb{C} \\
\operatorname{tr} \mathbb{1}_{n\times n} &= n \\
&\quad \nwarrow n \times n\text{-Einheitsmatrix} \\
\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{j,k=1}^{n} A_{jk} B_{kj} = \operatorname{tr}(BA) \qquad \text{Zyklizität}
\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} R(\vec{\phi}) &= \underbrace{\operatorname{tr} \mathbb{1}_{3\times 3}}_{=3} \cos\phi + \underbrace{\underbrace{\operatorname{tr}\left(\vec{n}\vec{n}^{\,T}\right)}\,(1-\cos\phi)}_{\sum_{j=1}^{3} n_j n_j = \vec{n}^2 = 1} + \underbrace{\operatorname{tr}(\vec{n}\cdot\vec{\omega})}_{=0} \sin\phi \\
\operatorname{tr} R(\vec{\phi}) &= 1 + 2\cos\phi
\end{aligned} \tag{134}$$

D.h. den Betrag des Winkels ϕ bestimmt man leicht aus der Spur der Drehmatrix!

Zur Bestimmung der Achse $\vec{n} = \dfrac{\vec{\phi}}{\phi}$ von

$$R(\vec{\phi}) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

ist folgende Identität nützlich:

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{jkl}\,\epsilon_{jkm} &= \quad \epsilon_{12l}\,\epsilon_{12m} + \epsilon_{21l}\,\epsilon_{21m} + \epsilon_{13l}\,\epsilon_{13m} + \epsilon_{31l}\,\epsilon_{31m} \\
&\qquad + \epsilon_{23l}\,\epsilon_{23m} + \epsilon_{32l}\,\epsilon_{32m} \\
&= 2\,\delta_{lm},
\end{aligned} \tag{135}$$

die man durch Einsetzen von $l, m = 1, 2, 3$ überprüft. Aus Gl. (128) finden wir:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{jkm} \left[R(\vec{\phi})\right]_{jk} \;=\;& \underbrace{\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{jkm}\delta_{jk}}_{=\,0} \cos\phi \;+\; \underbrace{\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{jkm} n_j n_k}_{=\,0} (1-\cos\phi) \\
&+ \sum_{l=1}^{3} \underbrace{\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{jkl}\epsilon_{jkm}}_{\overset{(135)}{=}\, 2\delta_{lm}} \, n_l \, \sin\phi \\
=\;& 2\, n_m \, \sin\phi \;=\; 2\,\frac{\phi_m}{\phi}\, \sin\phi
\end{aligned}
\tag{136a}
$$

$$
\Rightarrow \quad \frac{\vec{\phi}}{\phi} = \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sin\phi} \begin{pmatrix} r_{23} - r_{32} \\ r_{31} - r_{13} \\ r_{12} - r_{21} \end{pmatrix} \tag{136b}
$$

An Gl. (136b) erkennt man, dass man mit $(\vec{n}, \phi)$ als zweite Lösung $(-\vec{n}, -\phi)$ erhält, die Orientierung von $\vec{n}$ kann z.B. immer so gewählt werden, dass $\phi \geq 0$ ist. Für $\phi = 0$ ist $R(\vec{\phi}) = \mathbb{1}$ und die Drehachse unbestimmt. Für $\phi = \pi$ ist $\cos\phi = -1$ und mit Gl. (130):

$$
R(\pi\vec{n}) = \begin{pmatrix} -1 + 2n_1^2 & 2n_1 n_2 & 2n_1 n_3 \\ 2n_1 n_2 & -1 + 2n_2^2 & 2n_2 n_3 \\ 2n_1 n_3 & 2n_2 n_3 & -1 + 2n_3^2 \end{pmatrix} \tag{137}
$$

D.h.

$$
n_j \;=\; \pm\sqrt{\frac{R_{jj} + 1}{2}} \tag{138}
$$

und die korrekten Vorzeichen bestimmt man aus denen der Nebendiagonalelemente von Gl. (137).

Bisher betrachtet: <u>Passive</u> Drehung = Drehung des Koordinatensystems

Alternativ: <u>Aktive</u> Drehung = Drehung eines Vektors bei festem Koordinatensystem

Die aktive Drehung wird durch $R(-\vec{\phi})$ beschrieben!

Drehung eines beliebigen Vektors $\vec{a}$:

$$R(\vec{\phi})\,\vec{a} \;=\vec{a}\cos\phi\;+\;(\vec{n}\cdot\vec{a})\vec{n}(1-\cos\phi)\;+\;(\vec{n}\cdot\vec{\omega})\vec{a}\sin\phi,$$

wobei

$$\begin{aligned}
\left[(\vec{n}\cdot\vec{\omega})\,\vec{a}\right]_k \;&=\; \sum_{j,l=1}^{3} n_j\epsilon_{jkl}a_l \\
&=\; -\sum_{j,l=1}^{3} \epsilon_{kjl}n_j a_l \;=\; -\left[\vec{n}\times\vec{a}\right]_k\,,
\end{aligned} \tag{139}$$

also

$$\begin{aligned}
R(\vec{\phi})\,\vec{a} \;=\;& \;\vec{a}\cos\phi\;+\;(\vec{n}\cdot\vec{a})\vec{n}(1-\cos\phi) \\
&-\vec{n}\times\vec{a}\,\sin\phi
\end{aligned} \tag{140}$$

Den letzten Term kann man so bestimmen

$$\left(R(\vec{\phi})-R(\vec{\phi})^T\right)\,\vec{a}\;=\;\left(R(\vec{\phi})-R(-\vec{\phi})\right)\,\vec{a}\;=\;-2\,\vec{n}\times\vec{a}\,\sin\phi \tag{141}$$

Taylor-Entwicklung: Eine Funktion $f(x)$ sei bei $x=x_0$ beliebig oft differenzierbar.

$$T_n\left[f,x_0\right](x)\;:=\;\sum_{j=0}^{n}\frac{(x-x_0)^j}{j!}\,\frac{d^j f}{dx^j}(x_0) \tag{142}$$

ist das Taylor-Polynom n-ten Grades von f bei x_0. Es hat die Eigenschaft:

$$\frac{d^j T_n\left[f,x_0\right](x_0)}{dx^j}\;:=\;\frac{d^j f}{dx^j}(x_0)\qquad \text{für } 0\leq j\leq n.$$

Taylor-Reihe:

$$T_\infty\left[f, x_0\right](x) \;:=\; \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^j}{j!}\,\frac{d^j f}{dx^j}(x_0).$$

Konvergiert die Taylor-Reihe in einer Umgebung von x_0 gegen x, so nennt man f bei x_0 analytisch und schreibt

$$f(x) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^j}{j!}\,\frac{d^j f}{dx^j}(x_0). \tag{143}$$

Die wichtigste Taylor-Reihe der Physik ist

$$e^x \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}, \tag{144}$$

die für alle $x \in \mathbb{C}$ konvergiert!

$$\begin{aligned} \cos x \;&=\; \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ix)^j + (-ix)^j}{2j!} \quad \text{Nur gerade } j \text{ tragen bei.} \\ &\overset{j=2k}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \end{aligned} \tag{145}$$

Ebenso:

$$\begin{aligned} \sin x \;&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \ldots \end{aligned} \tag{146}$$

In Gl. (144) kann man auch $n \times n$-Matrizen M einsetzen:

$$e^M \;=\; \exp M \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \frac{M^j}{j!} \;=\; \mathbb{1} \,+\, M \,+\, \frac{M^2}{2} \,+\, \frac{M^3}{3!} \,+\, \ldots, \tag{147}$$

die für alle $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ konvergiert! Achtung: I.A. ist $e^A e^B \neq e^{A+B}$.

Ohne Beweis:

$$R(\vec{\phi}) \;= e^{\vec{\phi}\cdot\vec{\omega}} \;=\; e^{\phi \sum_{j=1}^{3} n_j \omega^{(j)}} \tag{148}$$

mit $\vec{\phi} = \phi\vec{n}$ und $\omega^{(j)}$ aus Gl. (131).

Gilt $S^T S = \mathbb{1}$ mit $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $\det S = -1$, so beschreibt S eine Drehspiegelung

$$S \;= PR \tag{149}$$

mit einer Drehmatrix R und

$$P \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{150}$$

Die Punktspiegelung

$$\vec{x} \to \vec{x}\,' \;= Px \;=\; -\vec{x} \tag{151}$$

heißt auch Paritätstransformation.

Linksschraube $\xrightarrow{P}$ Rechtsschraube

P ist zwar eine Symmetrie der Gesetze der Mechanik, aber nicht aller Naturgesetze!

Flugrichtung

$\uparrow$ Neutrino ν (als masselos betrachtet)

Spinvektor (Spin ist eine Art Drehimpuls.)