Institut für Theoretische Teilchenphysik

Theoretische Physik A

WS 2000/01

Prof. Dr. J. Kühn / Dr. W. Kilian **1. Klausur (Blatt 8)** 2. 12. 2000

---

1. Hyperbelfunktionen (9 Punkte)

Der Hyperbelkotangens ist wie folgt definiert:

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \tag{1}$$

wobei die Hyperbelfunktionen durch $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ und $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ gegeben sind. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definitionen:

(a) $\coth(-x) = -\coth x$ (2 Punkte)

(b) $\coth^2 x - 1 = 1/\sinh^2 x$ (2 Punkte)

(c) $\frac{d}{dx}\coth x = -1/\sinh^2 x$ (2 Punkte)

(d) Zeigen Sie durch Integration:

$$\int dx\, \sqrt{ae^x + 1} = 2\left[\sqrt{ae^x + 1} - \operatorname{Arcoth}(\sqrt{ae^x + 1})\right] \qquad (a \in \mathbb{R},\ a > 0), \tag{2}$$

wobei Arcoth die Umkehrfunktion des coth ist. (3 Punkte)

Hinweis: Substitution, z.B. zunächst $\sqrt{ae^x + 1} = u$ und dann $u = \coth y$.

2. Bahnkurve (13 Punkte)

Eine Bahnkurve ist gegeben durch

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} e^{\omega t}\cos\omega t \\ e^{\omega t}\sin\omega t \\ ct \end{pmatrix} \qquad (c, \omega \in \mathbb{R},\ \omega > 0). \tag{3}$$

(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$. (3 Punkte)

(b) Skizzieren Sie die Bahnkurve für den Spezialfall $c = 0$. (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie für den Spezialfall $c = 0$, daß der Winkel α zwischen $\mathbf{r}(t)$ und $\mathbf{v}(t)$ nicht von t abhängt. (3 Punkte)

Hinweis: $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{r}||\mathbf{v}|}$.

(d) Berechnen Sie für den Spezialfall $c = 0$ die Bogenlänge der Kurve $L(t_0, t_1)$ zwischen $t_0 = 0$ und $t_1 = 2\pi/\omega$. (2 Punkte)

(e) Berechnen Sie für $c = \omega$ die Bogenlänge der Kurve $L(t_0, t_1)$ zwischen $t_0 = 0$ und $t_1 = 2\pi/\omega$. (3 Punkte)

Hinweis: Das Integral läßt sich durch eine einfache Substitution auf die Form (2) bringen.

3. Drehmatrix (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Die folgende Matrix D ist eine Drehmatrix: (3 Punkte)

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

(b) Was ist die Drehachse (ohne Rechnung)? (1 Punkt)

4. Bezugssysteme (8 Punkte)

Eine Bahnkurve lautet im Bezugssystem A:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} -ct^2 \\ bt \\ ct^2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Geben Sie die Bahnkurve in den folgenden Bezugssystemen an:

(a) B: Gleichförmig mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = b\mathbf{e}_2$ bewegt (für $t = t_0$ sollen die Koordinaten von A und B zusammenfallen); (2 Punkte)

(b) C: Mit konstanter Beschleunigung $\mathbf{a} = 2c(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$ bewegt (für $t = 0$ sollen die Koordinaten von A und C zusammenfallen und die Relativgeschwindigkeit verschwinden); (2 Punkte)

(c) D: Mit der Matrix D aus Gl. (4) gegenüber A verdreht (d.h., die Koordinaten eines Vektors $\mathbf{v}$ in A lauten $D^{-1}\mathbf{v}$ in D). (3 Punkte)

(d) Welche der Bezugssysteme B, C und D sind Inertialsysteme, wenn A ein Inertialsystem ist? (1 Punkt)

5. Taylorreihen (6 Punkte)

Berechnen Sie die Potenzreihenentwicklung um $x = x_0$ bis zur Ordnung $(x - x_0)^2$ (einschließlich) für die folgenden Funktionen

(a) $f(x) = \sin(x^2), \qquad x_0 = 0$ (3 Punkte)

(b) $f(x) = \ln x, \qquad x_0 = 1$ (3 Punkte)