**Institut für Theoretische Teilchenphysik**

# Theoretische Physik A

WS 2000/01

Prof. Dr. J. Kühn / Dr. W. Kilian **2. Klausur (Blatt 16)** 10. 2. 2001

---

**1.** Zentralkraft: Harmonischer Oszillator (32 Punkte)

Zwei Massepunkte (Massen $m_1 = m$ und $m_2 = 2m$) bewegen sich im $\mathbb{R}^3$ unter Einfluß der anziehenden Kraft $\mathbf{F}_{12} = -k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ mit $k > 0$.

**(a)** Wo liegt der Schwerpunkt und wie lautet die Bewegungsgleichung für die Schwerpunktsbewegung? (3 Punkte)

**(b)** Wie groß ist die reduzierte Masse $\mu$ und wie lautet die Bewegungsgleichung für die Relativbewegung (Relativabstand $\mathbf{r}$, Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$)? (3 Punkte)

**(c)** Berechnen Sie die Arbeit, die im Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ entlang der folgenden Wege geleistet wird: (i) gerade Linie $(0,0,0) \to (1,1,0)$; (ii) Kreis mit Radius $R$ um den Koordinatenursprung. (4 Punkte)

**(d)** Wie lautet das zum Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ zugehörige Potential $U(\mathbf{r})$? (2 Punkte)

**(e)** Warum können Sie zur Lösung der Bewegungsgleichung annehmen, daß die Relativbewegung in der $xy$-Ebene verläuft? (4 Punkte)

**(f)** Geben Sie für die Relativbewegung die Gleichungen für die Erhaltung von Energie $E$ und Drehimpuls $\mathbf{L} = L_z\mathbf{e}_z$ in Polarkoordinaten $(r, \phi)$ an. (4 Punkte)

**(g)** Stellen Sie damit die Differentialgleichung für die Radialbewegung $r(t)$ auf. (2 Punkte)

**(h)** Benutzen Sie die Substitution $r(t)^2 = a + b\rho(t)$, um die Differentialgleichung auf die Form $\dot{\rho}^2 = 4\omega^2(1-\rho^2)$ zu bringen. Drücken Sie $a, b$ und $\omega$ durch $k$, $\mu$, $L_z$ und $E$ aus. (6 Punkte)

**(i)** Bestimmen Sie daraus die allgemeine Lösung für $\rho(t)$ und damit auch $r(t)$. (4 Punkte)

Hinweis: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

**2.** Raumflug (25 Punkte)

Die Erde und ein äußerer Planet bewegen sich auf Kreisbahnen um die Sonne (Bahnradius $R$ und $kR$ mit $k > 1$; Sonnenmasse $m_S$, Gravitationskonstante $G$). Ein Raumschiff soll von der Erde zum Planeten fliegen, ohne (außer beim Start) Treibstoff zu benötigen. Dafür ist eine Ellipsenbahn geeignet, deren sonnennächster Punkt auf der Erdbahn und sonnenfernster Punkt auf der Planetenbahn liegt.

**(a)** Zeigen Sie: Parameter und Exzentrizität dieser Bahn sind (4 Punkte)

$$p = \frac{2k}{k+1}R \quad \text{und} \quad \epsilon = \frac{k-1}{k+1}.$$

**(b)** Wieviel Jahre dauert es, bis ein Raumschiff auf einer solchen Bahn von der Erdbahn zur Planetenbahn gelangt ist? [Hinweis: 3. Keplersches Gesetz] (4 Punkte)

**(c)** Welche Geschwindigkeit hat das Raumschiff bei der Ankunft auf der Bahn des äußeren Planeten? (4 Punkte)

**(d)** Wie groß ist die Ankunftsgeschwindigkeit im Ruhesystem des Planeten? Nehmen Sie an, daß sich Raumschiff und Planet in der gleichen Richtung um die Sonne bewegen. (4 Punkte)

**(e)** Das Raumschiff soll im Schwerefeld des Planeten ohne Einsatz von Treibstoff beschleunigt werden. Wie ist das möglich? Welche Form hat die Bahn in der Nähe des Planeten (mit Begründung), und welche Geschwindigkeit hat das Raumschiff maximal nach der Begegnung? (5 Punkte)

**(f)** Wie groß muß $k$ mindestens sein, damit das Raumschiff unter diesen Bedingungen anschließend das Sonnensystem verlassen kann? (4 Punkte)

Hinweise: Eine Ellipsenbahn mit Halbachsen $p/\sqrt{1-\epsilon^2}$ und $p/(1-\epsilon^2)$ wird durch $r = p/(1+\epsilon\cos(\phi-\phi_0))$ beschrieben. Die Gesamtenergie ist $E = -Gm_1m_2(1-\epsilon^2)/(2p)$.

**3.** Erzwungene Schwingung mit Reibung (23 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung für $x(t)$

$$\ddot{x} + \omega\dot{x} + \omega^2 x = f(t) \quad \text{mit} \quad f(t) = at\,\theta(t)\,\theta(t_0 - t), \quad a, t_0 > 0.$$

**(a)** Skizzieren Sie $f(t)$. (2 Punkte)

**(b)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung für $t < 0$ und $t > t_0$. (5 Punkte)

**(c)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für $0 < t < t_0$. (4 Punkte)

**(d)** Skizzieren Sie die spezielle Lösung $x(t)$, die für $t < 0$ verschwindet. (4 Punkte)

**(e)** Berechnen Sie diese spezielle Lösung im Bereich $0 < t < t_0$. (6 Punkte)

**(f)** Mit der vorgegebenen Anregung $f(t)$ sind die Lösung $x(t)$ und ihre Ableitung $\dot{x}$ bei $t = 0$ und $t = t_0$ stetig. Wie müßte $f(t)$ aussehen, wenn $x(t)$ bei $t = 0$ einen Knick hätte? (2 Punkte)