Institut für Theoretische Teilchenphysik

Theoretische Physik A

WS 2000/01

Prof. Dr. J. Kühn / Dr. W. Kilian **2. Klausur (Blatt 16)** 10. 2. 2001

Lösungsvorschläge

1. Zentralkraft: Harmonischer Oszillator (32 Punkte)

(a) Schwerpunkt: (3 Punkte)

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{1}{3}\mathbf{r}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{r}_2$$

Bewegungsgleichung:

$$(m_1+m_2)\ddot{\mathbf{R}} = 3m\ddot{\mathbf{R}} = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{\mathbf{R}} = 0$$

(b) Reduzierte Masse: (3 Punkte)

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \frac{2}{3}m$$

Bewegungsgleichung:

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = \frac{2}{3}m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}$$

(c) (4 Punkte)

(i) Parametrisierung: $\mathbf{r}(t) = (1,1,0)t$

$$d\mathbf{r} = (1,1,0)\,dt \quad \rightarrow \quad W = -\int d\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}) = k\int d\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = k\int_0^1 2t\,dt = k$$

(ii) Das Integral ist Null, aus zwei Gründen: (a) überall ist $\mathbf{F} \perp d\mathbf{r}$; (b) das Kraftfeld ist konservativ (aus einem Potential ableitbar), daher verschwindet das Integral über einen geschlossenen Weg.

(d) $U(\mathbf{r}) = \frac{k}{2}\mathbf{r}^2$, damit ist $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} U$. (2 Punkte)

(e) Der Drehimpuls ist erhalten (Zentralkraft). Weil der Drehimpuls orthogonal auf $\mathbf{r}$ und $\dot{\mathbf{r}}$ steht, liegen diese Vektoren und damit die gesamte Bahnkurve in der Ebene orthogonal zu $\mathbf{L}$. Das das System isotrop ist, können wir ein Inertialsystem wählen, so daß das die xy-Ebene ist. (4 Punkte)

(f) (4 Punkte)

$$E = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{k}{2}r^2 \quad \text{und} \quad L_z = \mu r^2\dot{\phi}$$

(g) Einsetzen von L_z in die Gleichung für E ergibt (2 Punkte)

$$E = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{\mu^2 r^2}\right) + \frac{k}{2}r^2$$

oder

$$\dot{r}^2 = \frac{2E}{\mu} - \frac{k}{\mu}r^2 - \frac{L_z^2}{\mu^2 r^2}$$

(h) Multipliziere die DGL mit $4r^2$:

$$4r^2\dot{r}^2 = 4\left(\frac{2E}{\mu}r^2 - \frac{k}{\mu}r^4 - \frac{L_z^2}{\mu^2}\right)$$

Substitution:

$$r(t)^2 = a + b\rho(t) \quad \rightarrow \quad 2r\dot{r} = b\dot{\rho}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} b^2\dot{\rho}^2 &= 4\left(\frac{2E}{\mu}(a+b\rho) - \frac{k}{\mu}(a^2 + 2ab\rho + b^2\rho^2) - \frac{L_z^2}{\mu^2}\right) \\ &= 4\left[\left(\frac{2E}{\mu}a - \frac{k}{\mu}a^2 - \frac{L_z^2}{\mu^2}\right) + \left(\frac{2E}{\mu}b - \frac{2k}{\mu}ab\right)\rho - \frac{k}{\mu}b^2\rho^2\right] \end{aligned}$$

d.h.

$$\dot{\rho}^2 = 4\frac{k}{\mu}\left[\left(\frac{2E}{k}a - a^2 - \frac{L_z^2}{k\mu}\right)\frac{1}{b^2} + \frac{2}{b}\left(\frac{E}{k} - a\right)\rho - \rho^2\right]$$

Vergleich mit $\dot{\rho}^2 = 4\omega^2(1-\rho^2)$ ergibt:

$$\omega = \sqrt{k/\mu} \quad \text{und} \quad a = E/k$$

sowie nach Einsetzen von a

$$b^2 = \frac{E^2}{k^2} - \frac{L_z^2}{k\mu} \quad \text{oder} \quad b = \frac{E}{k}\sqrt{1 - \frac{k}{\mu}\frac{L_z^2}{E^2}} = \frac{E}{k}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega L_z}{E}\right)^2}$$

(6 Punkte)

(i)

$$\frac{d\rho}{dt} = 2\omega\sqrt{1-\rho^2} \qquad \rightarrow \qquad \int\frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = 2\omega\int dt$$

$$\rightarrow \qquad \arcsin\rho = 2\omega(t-t_0) \qquad \rightarrow \qquad \rho(t) = \sin 2\omega(t-t_0)$$

Einsetzen für $r(t)$:

$$r(t) = \sqrt{a + b\rho(t)} = \sqrt{\frac{E}{k}}\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega L_z}{E}\right)^2}\sin 2\omega(t-t_0)\right)^{1/2}$$

(4 Punkte)

2. Raumflug (25 Punkte)

(a) Ellipsengleichung für $\phi = \phi_0$ (Perihel) und $\phi = \phi_0 + \pi$ (Aphel):

$$\frac{p}{1+\epsilon} = R \quad \text{und} \quad \frac{p}{1-\epsilon} = kR$$

Division:

$$\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} = k \qquad \rightarrow \qquad 1+\epsilon = k - k\epsilon \qquad \rightarrow \qquad \epsilon = \frac{k-1}{k+1}$$

$$\rightarrow \qquad p = R(1+\epsilon) = \frac{2k}{k+1}R$$

(4 Punkte)

(b) 3. Keplersches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen. Umlaufzeiten: 1 a für die Erde und T für das Raumschiff; Große Halbachsen: R für die Erde und

$$\frac{p}{1-\epsilon^2} = \frac{1}{p}\left(\frac{p}{1-\epsilon}\right)\left(\frac{p}{1+\epsilon}\right) = \frac{k+1}{2kR}(kR)\,R = \frac{k+1}{2}R$$

für das Raumschiff. Also:

$$\frac{T^2}{(1\text{ a})^2} = \left(\frac{k+1}{2}R\right)^3 \frac{1}{R^3} \qquad \rightarrow \qquad T = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{3/2} \text{ a}$$

Die Flugdauer ist $T/2 = 2^{-5/2}(k+1)^{3/2}$. (4 Punkte)

(c) Energiesatz mit $U(r) = -Gmm_S/r$ und $E = -Gmm_S(1-\epsilon^2)/2p$:

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(r) \qquad \rightarrow \qquad \frac{E}{m} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{U(r)}{m} \qquad \rightarrow \qquad v^2 = \frac{2E}{m} - \frac{2U(r)}{m}$$

d.h. konkret

$$v^2 = -Gm_S\left(\frac{1-\epsilon^2}{p} - \frac{2}{kR}\right) = -Gm_S\left(\frac{2}{(k+1)R} - \frac{2}{kR}\right) = \frac{2Gm_S}{k(k+1)R}$$

(4 Punkte)

(d) Die Geschwindigkeit des Planeten auf einer Kreisbahn berechnet sich ebenso, wobei $\epsilon = 0$ und $p = kR$ ist:

$$v_P^2 = -Gm_S\left(\frac{1}{kR} - \frac{2}{kR}\right) = \frac{Gm_S}{kR}$$

Im Ruhesystem des Planeten hat das Raumschiff also die Geschwindigkeit

$$\hat{v} = v - v_P = \sqrt{\frac{Gm_S}{kR}}\left(\sqrt{\frac{2}{k+1}} - 1\right)$$

Diese Geschwindigkeit ist negativ, d.h. der Planet holt das Raumschiff auf seiner Bahn ein. (4 Punkte)

(e) Im Schwerefeld des Planeten hat das Raumschiff eine nichtverschwindende asymptotische Geschwindigkeit, befindet sich also auf einer Hyperbelbahn. Auf einer solchen Bahn wird das Raumschiff in eine andere Richtung zurückgeschleudert; im Extremfall (sehr nahe Begegnung) praktisch in die Richtung, aus der es gekommen ist. Nach der Begegnung hat das Raumschiff im Ruhesystem des Planeten damit die Geschwindigkeit

$$\hat{v}' = -\hat{v}$$

d.h. im ursprünglichen Bezugssystem

$$v' = \hat{v}' + v_P = 2v_P - v = \sqrt{\frac{Gm_S}{kR}}\left(2 - \sqrt{\frac{2}{k+1}}\right)$$

Weil $\hat{v}$ negativ war, ist $\hat{v}'$ positiv, die Geschwindigkeit nach der Begegnung v' also größer als die des Planeten. Bei Austritt in einer anderen Richtung ist v' nicht so groß, weil sich die Geschwindigkeiten vektoriell addieren. (5 Punkte)

(f) Das Raumschiff soll sich nach der Begegnung auf einer Parabelbahn befinden: $\epsilon = 1$, also $E = 0$. Wir können wieder den Energiesatz verwenden:

$$v'^2 = \frac{Gm_S}{kR}\left(2 - \sqrt{\frac{2}{k+1}}\right)^2 = -Gm_S\left(0 - \frac{2}{kR}\right)$$

Wir kürzen Gm_S/kR und ziehen die Wurzel:

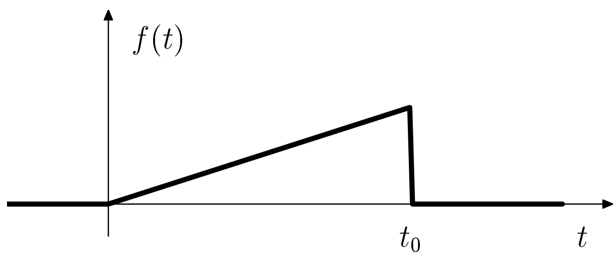
$$2 - \sqrt{\frac{2}{k+1}} = \sqrt{2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\rightarrow \qquad k = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2} - 1 = (\sqrt{2}+1)^2 - 1 = 2(1+\sqrt{2}) \approx 4.82$$

(4 Punkte)

3. Erzwungene Schwingung mit Reibung (23 Punkte)

(a) Skizze:



(2 Punkte)

(b) Für $t < 0$ und $t > t_0$ verschwindet die rechte Seite, es ist also eine homogene Differentialgleichung. Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

$$
\begin{aligned}
& 0 = \ddot{x} + \omega\dot{x} + \omega^2 x = \left(\lambda^2 + \omega\lambda + \omega^2\right) e^{\lambda t} \\
\rightarrow \qquad & 0 = \lambda^2 + \omega\lambda + \omega^2 \\
\rightarrow \qquad & \lambda = -\frac{\omega}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{4} - \omega^2} = \frac{\omega}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

Nach der Eulerschen Formel ist das

$$e^{\lambda t} = e^{-\omega t/2}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t)$$

Realteil und Imaginärteil sind jeweils eine Lösung; die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination

$$x(t) = Ae^{-\omega t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t + Be^{-\omega t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t$$

mit unbestimmten Konstanten A und B. (5 Punkte)

(c) Für $0 < t < t_0$ ist die rechte Seite nicht Null; wir müssen zunächst eine Partikulärlösung der Gleichung

$$\ddot{x} + \omega\dot{x} + \omega^2 x = at$$

suchen. Ein Ansatz vom Typ der rechten Seite ist:

$$x(t) = bt + c$$

Einsetzen liefert

$$0 + \omega b + \omega^2(bt + c) = at$$

also durch Koeffizientenvergleich

$$b = \frac{a}{\omega^2} \quad \text{und} \quad c = -\frac{b}{\omega} = -\frac{a}{\omega^3}$$

Die allgemeine Lösung ist die Summe aus dieser partikulären Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung, d.h.

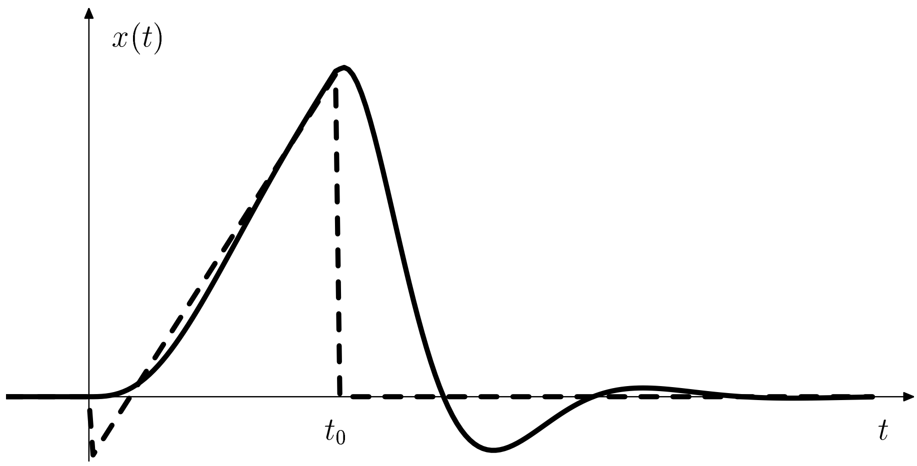
$$x(t) = Ae^{-\omega t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\omega t + Be^{-\omega t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\omega t + \frac{a}{\omega^3}(\omega t - 1)$$

(4 Punkte)

(d) Man muß der partikulären Lösung

$$x(t) = \frac{a}{\omega^3}(\omega t - 1)\, \theta(t)\, \theta(t_0 - t)$$

für $t > 0$ und $t > t_0$ jeweils eine gedämpfte Schwingung so überlagern, daß die Kurve glatt anschließt: (4 Punkte)



(e) Für $0 < t < t_0$:

$$x(t) = Ae^{-\omega t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\omega t + Be^{-\omega t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\omega t + \frac{a}{\omega^3}(\omega t - 1)$$

$$\dot{x}(t) = \left(-\frac{\omega}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega B\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\omega t + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\omega A - \frac{\omega}{2}B\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\omega t + \frac{a}{\omega^2}$$

Für $t < 0$ ist $x(t) \equiv 0$; wenn die Funktion stetig und differenzierbar sein soll, muß $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ sein. Das heißt:

$$0 = x(0) = A - \frac{a}{\omega^3} \qquad \text{und} \qquad 0 = \dot{x}(0) = -\frac{\omega}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega B + \frac{a}{\omega^2}$$

also $A = \dfrac{a}{\omega^3}$ und $B = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{a}{\omega^3}$.

Damit ist die Lösung für $0 < t < t_0$:

$$x(t) = \frac{a}{\omega^3}\left[e^{-\omega t/2}\left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}\omega t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\omega t\right) + \omega t - 1\right]$$

(6 Punkte)

(f) Wenn $x(t)$ bei $t = 0$ einen Knick hätte, hätte $\dot{x}$ dort einen Sprung. Dann wären $\ddot{x}$ und damit $f(t)$ an dieser Stelle proportional zur δ-Funktion $\delta(t)$. (2 Punkte)