Aufgabe 1: Motorboot 4 Punkte

Der Antriebsmotor eines mit konstanter Geschwindigkeit v_0 auf einem ruhigen See fahrenden Motorbootes wird ausgeschaltet. Von diesem Zeitpunkt an wirkt auf das Boot lediglich die bremsende Wirkung des Wassers. Das Bremsvermögen wird proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit angenommen, es gilt also

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2 ,$$

wobei k eine positive Konstante ist.

i) Zeigen Sie, daß die daraus resultierende Geschwindigkeit als Funktion der Zeit t nach Abschalten des Motors durch folgenden Ausdruck gegeben ist: *1P*

$$v = \frac{v_0}{1 + v_0 kt} .$$

Die erste Ableitung von v ist

$$v' = \frac{-v_0\, v_0 k}{(1 + v_0 kt)^2} .$$

Diese in die Differentialgleichung eingesetzt ergibt

$$\frac{-v_0^2 k}{(1 + v_0 kt)^2} \stackrel{?}{=} -k \left(\frac{v_0}{1 + v_0 kt} \right)^2 = \frac{-kv_0^2}{(1 + v_0 kt)^2} .$$

Somit ist der gegebene Ausdruck für v eine Lösung der Bewegungsgleichung.

ii) Berechnen Sie die in der Zeit t zurückgelegte Strecke. *1P*

Der zurückgelegte Weg ist das Integral der Geschwindigkeit über die Zeit, beginnend mit dem Ausschalten des Motors bei $t = 0$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \mathrm{d}t' \, \frac{v_0}{1 + v_0 kt'} \\ &= \frac{1}{k} \int_1^{1+v_0 kt} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \qquad [\text{Substitution: } \tau = 1 + v_0 kt'] \\ &= \frac{1}{k} \ln(1 + v_0 kt) . \end{aligned}$$

iii) Zeigen Sie, daß die Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Ort exponentiell abnimmt. *1P*

Um v als Funktion von x auszudrücken, muß $x(t)$ nach t aufgelöst und in $v(t)$ eingesetzt werden:

$$x = \frac{1}{k} \ln(1 + v_0 kt) \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\mathrm{e}^{kx} - 1}{v_0 k} .$$

$$v = \frac{v_0}{1 + v_0 k \frac{\mathrm{e}^{kx} - 1}{v_0 k}} = v_0 \mathrm{e}^{-kx} .$$

Das ist aber genau das exponentielle Abklingen, das zu zeigen war.

iv) Welche Größe hat die Konstante k, wenn die Geschwindigkeit nach dem Abschalten des Motors in 15 Sekunden auf die Hälfte der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 6\,\mathrm{m/s}$ abgenommen hat? *1P*

Für k gilt

$$v = \frac{v_0}{1 + v_0 kt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v_0}{v} = 1 + v_0 kt \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{v_0 t} \left(\frac{v_0}{v} - 1 \right) .$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten also

$$k = \frac{1}{6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 15\,\mathrm{s}} (2 - 1) \quad \Rightarrow \quad k^{-1} = 90\,\mathrm{m} .$$

Aufgabe 2: Differentialgleichung 3 Punkte

Ein eindimensionales physikalisches System $\phi(x, t)$ werde durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \qquad (c = \text{konst.}) .$$

i) Zeigen Sie, daß der Lösungsansatz *1P*

$$\phi = A \cos(\omega t - kx) \qquad (\omega, k = \text{konst.})$$

die Differentialgleichung erfüllt.

Wie hängen die Konstanten c, k und ω zusammen?

Die Ableitungen nach Zeit und Ort lauten:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} [kA \sin(\omega t - kx)] = -k^2 A \cos(\omega t - kx) .$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} [-\omega A \sin(\omega t - kx)] = -\omega^2 A \cos(\omega t - kx) .$$

In die Bewegungsgleichung eingesetzt ergibt sich

$$-k^2 A \cos(\omega t - kx) = \frac{1}{c^2} \left[-\omega^2 A \cos(\omega t - kx) \right] .$$

Diese Gleichung ist erfüllt für $c = \omega / k$.

ii) Zeigen Sie, daß $\phi = f(x \pm ct)$ die obige Differentialgleichung erfüllt, wobei f eine beliebige, z[illegible]nal differenzierbare Funktion ist. *2P*

Die Ableitungen folgen aus der Kettenregel:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial(x\pm ct)}\frac{\partial(x\pm ct)}{\partial x} = f'(x\pm ct)\,. \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = f''(x\pm ct)\,.$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial(x\pm ct)}\frac{\partial(x\pm ct)}{\partial t} = \pm c f'(x\pm ct)\,. \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2 f''(x\pm ct)\,.$$

Somit ist $f(x\pm ct)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung, denn

$$f''(x\pm ct) = \frac{1}{c^2}\left[c^2 f''(x\pm ct)\right]\,.$$

Aufgabe 3: Kraftfeld — 3 Punkte

Prüfen Sie, ob das folgende Feld für jede Wahl von $f(r)$ und $\vec{a}$ konservativ ist.

$$\vec{F} = f(r)\,(\vec{r}\times\vec{a})\,, \qquad r = |\vec{r}|,\ \vec{a} = \text{konst.}$$

Vorschlag zur arbeitssparenden Vorgehensweise:

a) Leiten Sie zunächst folgende „Produktregel" für ein Skalarfeld φ und einen Vektor $\vec{v}$ her: $\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{v}) = \varphi(\vec{\nabla}\times\vec{v}) + (\vec{\nabla}\varphi)\times\vec{v}$.

b) Benutzen Sie das aus den Übungen bekannt Resultat $\vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = 2\vec{\omega}$ für einen konstanten Vektor $\vec{\omega}$.

Nach der Definition des Vektorprodukts ist

$$\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{v}) = \sum_{ijk}\overset{?\,ijk}{\partial_i(\varphi v_j)\vec{e}_k} = \sum_{ijk}(\partial_i\varphi)v_j\vec{e}_k + \sum_{ijk}\varphi(\partial_i v_j)\vec{e}_k = (\vec{\nabla}\varphi)\times\vec{v} + \varphi(\vec{\nabla}\times\vec{v})\,.$$

Für das vorliegende Feld folgt mit Hilfe dieser Beziehung:

$$\vec{\nabla}\times f\,(\vec{r}\times\vec{a}) = f\left[\vec{\nabla}\times(\vec{r}\times\vec{a})\right] + (\vec{\nabla}f)\times(\vec{r}\times\vec{a})\,.$$

Für den ersten Term kann man die angegebene Identität $\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{r}) = 2\vec{a}$ anwenden (Vorzeichen!). Im zweiten Term muß man zunächst den Gradienten von f ausrechnen:

$$\vec{\nabla}f(r) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{\nabla}r = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}\,.$$

Der momentane Stand von rot $\vec{F}$ ist also

$$\vec{\nabla}\times f\,(\vec{r}\times\vec{a}) = -2f\vec{a} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{1}{r}\left[\vec{r}\times(\vec{r}\times\vec{a})\right]\,.$$

Auf die eckige Klammer kann man jetzt noch den Entwicklungssatz für das doppelte Kreuzprodukt $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ loslassen und erhält als Endergebnis

$$\vec{\nabla}\times f\,(\vec{r}\times\vec{a}) = -2f\vec{a} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{1}{r}\left[\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{a}) - \vec{a}(\vec{r}\cdot\vec{r})\right] = \left[-2f - r\frac{\partial f}{\partial r}\right]\vec{a} + \left[\frac{\vec{r}\cdot\vec{a}}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right]\vec{r}\,.$$

Für eine beliebige Wahl von f und $\vec{a}$ ist $\vec{F}$ also nicht konservativ, da seine Rotation nicht verschwindet.

Aufgabe 4: Wegintegral — 2 Punkte

Berechnen Sie die Arbeit, die man aufwenden muß, um im Kraftfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}$$

entlang der Ellipsenbahn

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \xi\cos\omega t \\ \eta\sin\omega t \\ \zeta \end{pmatrix}$$

vom Punkt $\vec{s}_1 = \vec{s}(t=0)$ bis zum Punkt $\vec{s}_2 = \vec{s}(t=\frac{\pi}{2\omega})$ zu gelangen.

Die gesuchte Arbeit ist das Integral von $\vec{F}$ entlang $\vec{s}$, also

$$\int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{F} = \int_0^{\pi/2\omega}\mathrm{d}t\,\dot{\vec{s}}\cdot\vec{F} =: I\,.$$

Setzt man die Parametrisierung des Integrationsweges ein, so bekommt man für das Integral

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2\omega}\mathrm{d}t\begin{pmatrix} -\omega\xi\sin\omega t \\ \omega\eta\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} (\xi\cos\omega t)(\eta\sin\omega t) \\ (\eta\sin\omega t)\zeta \\ \zeta(\xi\cos\omega t) \end{pmatrix} \\ &= -\omega\xi^2\eta\int_0^{\pi/2\omega}\mathrm{d}t\,\cos\omega t\sin^2\omega t + \omega\eta^2\zeta\int_0^{\pi/2\omega}\mathrm{d}t\,\cos\omega t\sin\omega t \\ &= -\xi^2\eta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\alpha\,\cos\alpha\sin^2\alpha + \eta^2\zeta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\alpha\,\cos\alpha\sin\alpha\,. \end{aligned}$$

Die beiden auftretenden Integrale lassen sich auf verschiedene Weisen lösen, z.B. durch Substitution:

$$\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\alpha\,\cos\alpha\sin\alpha \overset{x=\sin\alpha}{=} \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha}\cos\alpha\,x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,,$$

$$\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\alpha\,\cos\alpha\sin^2\alpha \overset{x=\sin^2\alpha}{=} \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{2\sin\alpha\cos\alpha}\cos\alpha\,x = \frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\,\sqrt{x} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Damit ist das Endergebnis

$$I = -\frac{\xi^2\eta}{3} + \frac{\eta^2\zeta}{2}\,.$$