UNIVERSITÄT KARLSRUHE

INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

Übungen zur Theoretischen Physik A WS 02/03

PROF. P. WÖLFLE
DR. M. GREITER

Musterlösung
1. Klausur

---

1. Bahnkurve (6 Punkte)

(a) $\boxed{1}$

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} a\cosh at \\ a\sinh at \\ a \end{pmatrix}$$

(b) $\boxed{1}$

$$\boldsymbol{a}(t) = \begin{pmatrix} a^2\sinh at \\ a^2\cosh at \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) $\boxed{4}$

$$L(t) = \int_0^t dt' \, |\boldsymbol{v}(t')| = \int_0^t dt \, \sqrt{a^2\cosh^2 at' + a^2\sinh^2 at' + a^2}$$

Mit $\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x$:

$$L(t) = \sqrt{2}\,|a| \int_0^t dt' \, \cosh at' = \sqrt{2}\,|a|\,\frac{\sinh at}{a} = \sqrt{2}\,\sinh(|a|t)$$

(Für $L(t) = \sqrt{2}\,\sinh(at)$ gibt es 3 der 4 Punkte.)

2. Erzwungene Schwingungen (12 Punkte)

Angabe einer partikulären Lösung:

(a) $x(t) = 0$ $\boxed{1}$

(Den Punkt gibt es auch bei Angabe der allgemeinen Lösung.)

(b) Ansatz $x = X_0 e^{i\omega t}$ für $\boxed{4}$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = e^{i\omega t}$$

ergibt

$$(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) X_0 = 1$$

oder

$$X_0 = \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \equiv x_0 e^{i\alpha}$$

Somit ergibt sich auch für die reelle Lösung der reellen Gleichung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \sin(\omega t)$$

die Lösung

$$x = x_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

mit

$$x_0 = |X_0| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}, \quad \tan\alpha = -\frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

(c) Ansatz $x = at\cos(\omega_0 t)$: $\boxed{2}$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -2a\omega \sin\omega_0 t - at\omega_0^2 \sin\omega_0 t + at\omega_0^2 \sin\omega_0 t \stackrel{!}{=} a\sin\omega_0 t$$

also

$$a = -\frac{1}{2\omega_0}$$

(d) Allgemein: $\boxed{4}$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t-t') f(t')$$

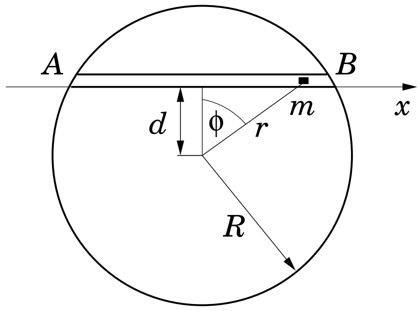
Mit $f(t) = \theta(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, \theta(t-t')\, \frac{1}{\omega_0}\, \sin\omega_0(t-t')\, \theta(t') = \theta(t) \int_0^t dt'\, \frac{1}{\omega_0}\, \sin\omega_0(t-t')$$

$$= \theta(t)\, \frac{1}{\omega_0^2}\, \cos\omega_0(t-t')\Big|_0^t = \theta(t)\, \frac{1}{\omega_0^2}\,(1-\cos\omega_0 t)$$

(e) $x(t) = G(t)$ $\boxed{1}$

3. Tunnel durch die Erde (6 Punkte)



(a) Gravitationsbeschleunigung auf m in x Richtung: $\boxed{4}$

$$g_x = -g_0 \, \frac{r}{R} \sin\phi = -g_0 \, \frac{x}{R} \qquad \text{da } x = r \sin\phi$$

Bewegungsgleichung:

$$-m\ddot{x} - m g_0 \, \frac{x}{R} = 0$$

oder

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \text{mit } \omega^2 = \frac{g_0}{R}$$

(b) Allgemeine Lösung: $\boxed{1}$

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

(c) Dauer einer halben Vollschwingung: $\boxed{1}$

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{R}{g_0}}$$