

Übungen zur Theoretischen Physik A WS 02/03

PROF. P. WÖLFLE

DR. M. GREITER

Musterlösung

2. Klausur

1. Kraftfeld

(5 Punkte)

(a)

1

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x \right) \mathbf{e}_z \\ &= \left(\left(-\frac{3}{2} \right) \frac{2x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^5} (-y) - \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{2y}{\left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^5} (-x) \right) \mathbf{e}_z \\ &= 0\end{aligned}$$

 $\Rightarrow \mathbf{F}$ konservativ.(b) Wegintegration von $\infty \rightarrow (x, y)$ entlang

3

$$\mathbf{s} = t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad d\mathbf{s} = dt \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} :$$

$$\begin{aligned}V(x, y) &= - \int_{\infty}^{(x, y)} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\infty}^1 \mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) \cdot \dot{\mathbf{s}}(t) dt \\ &= - \int_{\infty}^1 \frac{1}{\left(\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} \right)^3} \begin{pmatrix} -xt \\ -yt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \int_{\infty}^1 \frac{1}{t^2} dt = - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

(c) $\mathbf{L}_z$ bleibt erhalten.

1

Verantwortliche Symmetrie: Rotationssymmetrie um die z Achse.

2. Erzwungene Schwingungen

(8 Punkte)

(a) Ansatz $x = X_0 e^{i\omega t}$ für

4

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = e^{i\omega t}$$

ergibt

$$(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)X_0 = 1$$

oder

$$X_0 = \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \equiv x_0 e^{i\alpha}$$

Somit ergibt sich auch für die reelle Lösung der reellen Gleichung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \cos(\omega t)$$

die Lösung

$$x = x_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

mit

$$x_0 = |X_0| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}, \quad \tan \alpha = -\frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

(b) Allgemein:

4

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t-t') f(t')$$

Mit $f(t) = \theta(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \theta(t-t') \frac{1}{\Omega} \exp\left(-\frac{\gamma(t-t')}{2}\right) \sin(\Omega(t-t')) \theta(t') \\ &= \theta(t) \frac{1}{\Omega} \int_0^t dt' \exp\left(-\frac{\gamma(t-t')}{2}\right) \sin \Omega(t-t') \\ &= \theta(t) \frac{1}{\Omega} \int_{-t}^0 dt'' \exp\left(\frac{\gamma t''}{2}\right) (-\sin \Omega t'') \end{aligned}$$

Mit

$$\int e^{ax} \sin bx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} x(t) &= \theta(t) \frac{1}{\Omega} \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \Omega^2} \exp\left(\frac{\gamma t''}{2}\right) \left(-\frac{\gamma}{2} \sin \Omega t'' + \Omega \cos \Omega t''\right) \Big|_{-t}^0 \\ &= \theta(t) \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \Omega^2} \left(1 - \frac{1}{\Omega} \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \left(\frac{\gamma}{2} \sin \Omega t + \Omega \cos \Omega t\right)\right) \end{aligned}$$

3. Lenzscher Vektor

(6 Punkte)

(a) Mit $F(r) = -\frac{k}{r^2}$:

4

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{k} - \mathbf{e}_r$$

Abgeleitet

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} + \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{L}}}{k} - \dot{\mathbf{e}}_r$$

Mit

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi$$

ergibt sich der Drehimpuls zu

$$\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = m(r \mathbf{e}_r \times r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi) = mr^2 \dot{\phi} \mathbf{e}_z.$$

Mit der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k}{mr^2} \mathbf{e}_r,$$

Drehimpulserhaltung

$$\dot{\mathbf{L}} = 0$$

und

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi$$

ergibt sich

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{k} \left(-\frac{k}{mr^2} \mathbf{e}_r \times mr^2 \dot{\phi} \mathbf{e}_z \right) - \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi = 0$$

wobei $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_\phi$ verwendet wurde.

(b) $\boldsymbol{\epsilon}$ zeigt in Richtung des Perihels.

2

(Perihel = Punkt der Bahnkurve, an dem der Abstand zwischen Planet und Gravitationszentrum minimal wird.)

Begründung: am Perihel, $\dot{r} = 0$ und somit $\dot{\mathbf{r}} = r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi$. Eingesetzt ergibt sich

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi \times mr^2 \dot{\phi} \mathbf{e}_z}{k} - \mathbf{e}_r = \left(\frac{mr^3 \dot{\phi}^2}{k} - 1 \right) \mathbf{e}_r.$$

Der Lenzsche Vektor zeigt somit am Perihel in Richtung von $\mathbf{e}_r$.

4. Flaschenzug

(5 Punkte)

- (a) Annahme: m bewege sich mit Beschleunigung a nach unten. $\boxed{2}$

Der Flaschenzug untersetzt die die Kraft der Masse M 1:3 und M bewegt sich nur mit Beschleunigung $a/3$ nach oben.

Kraft auf das Seil:

$$m(g - a) = F_{\text{Seil}} = \frac{1}{3}M \left(g + \frac{a}{3} \right)$$

Aufgelöst:

$$a = \frac{m - \frac{M}{3}}{m + \frac{M}{9}} g$$

- (b) Kraft auf Verankerungspunkte: $\boxed{2}$

$$\begin{aligned} F &= 2F_{\text{Seil}} = 2m(g - a) = 2mg \left(1 - \frac{m - \frac{M}{3}}{m + \frac{M}{9}} \right) \\ &= 2mg \frac{m + \frac{M}{9} - m + \frac{M}{3}}{m + \frac{M}{9}} = 8g \frac{m \frac{M}{9}}{m + \frac{M}{9}} \end{aligned}$$

- (c) $\boxed{1}$

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{3}$$