UNIVERSITÄT KARLSRUHE — INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

Nachklausur zur Theoretischen Physik A — WS 02/03

PROF. P. WÖLFLE
DR. M. GREITER

07.05.03
Arbeitszeit 120 min

---

1. Kraftfeld (5 Punkte)

Gegeben sei ein Kraftfeld

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\left(\sqrt{2x^2+z^2}\right)^5} \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie dass $\boldsymbol{F}$ konservativ ist.

(b) Das zugehörige Potential $V(\boldsymbol{r})$ sei im Unendlichen nominiert: $V(\boldsymbol{r} \to \infty) = 0$. Berechnen Sie $V(\boldsymbol{r})$ durch Integration des Kraftfeldes entlang eines geeigneten Weges.

(c) Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in diesem Kraftfeld. Welche Komponenten des Drehimpulses bezüglich des Ursprungs sind erhalten? Welche Symmetrien sind für die Erhaltung verantwortlich?

2. Erzwungene Schwingungen (6 Punkte)

Geben Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \qquad (\text{wobei } \gamma > 0) \tag{2}$$

für die folgenden Störungen $f(t)$ an:

(a) $f(t) = \sin(2\omega_0 t)$.

(b) $f(t) = \delta(t) + c\delta(t - \frac{T}{2})$ wobei $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$, $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$.

Bestimmen Sie c so dass $x(t) = 0$ für $t > \frac{T}{2}$ falls $x(t) = 0$ für $t < 0$. Skizzieren Sie $x(t)$ für diesen Fall.

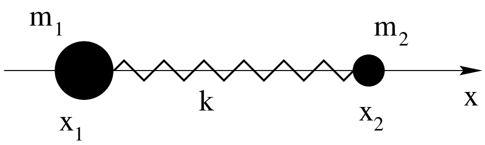
Hinweis:
Die Greensche Funktion des gedämpften Oszillators (2) ist gegeben durch:

$$G(t) = \theta(t)\,\frac{1}{\Omega}\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\sin(\Omega t) \quad \text{wobei } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \tag{3}$$

—bitte wenden—

3. Zweikörperproblem (7 Punkte)

Betrachten Sie zwei Massenpunkte mit den Massen m_1 und m_2, die durch eine Feder mit Federkonstante k verbunden sind. In der Ruhelage hat die Feder die Länge a.



(a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten x_1 und x_2 der beiden Massen an.

(b) Transformieren Sie diese Gleichungen auf Schwerpunkts– und Relativkoordinaten.

(c) Geben Sie die allgemeinen Lösungen der Bewegungsgleichungen für Schwerpunkts– und Relativkoordinaten an.

(d) Die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$ seien:

$$x_1(0) = -a, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = v_0, \quad \dot{x}_2(0) = 0.$$

Berechnen Sie $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

4. Keplerproblem und Lenzscher Vektor (6 Punkte)

Gegeben ist ein Planet im Gravitationsfeld mit Newtonscher Bewegungsgleichung

$$-m\ddot{\boldsymbol{r}} + F(r)\,\boldsymbol{e_r} = 0, \quad \text{wobei } F(r) = -\frac{k}{r^2}, \quad \boldsymbol{e_r} = \boldsymbol{r}/r. \tag{4}$$

In den Übungen wurde gezeigt, dass der Lenzsche Vektor

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{\dot{\boldsymbol{r}} \times \mathbf{L}}{r^2 F(r)} - \mathbf{e}_r$$

eine Erhaltungsgröße ist.

Wählen Sie ein Koordinatensystem, so dass der Drehimpulsvektor in Richtung der z-Achse und der Lenzsche Vektor in Richtung der x-Achse zeigt. Stellen Sie die Gleichungen für die Erhaltung von Drehimpuls $\mathbf{L} = (0, 0, L)$ und Lenz-Vektor $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon, 0, 0)$ in Polarkoordinaten auf, d.h. ausgedrückt durch $r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}$. Bestimmen Sie damit die Bahnkurve $r(\phi)$ für einen Planeten im Gravitationsfeld.