Universität Karlsruhe — Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik A WS 02/03

Prof. P. Wölfle
Dr. M. Greiter

Musterlösung
Nachklausur

1. Kraftfeld (5 Punkte)

(a) $\boxed{1}$

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial}{\partial z}F_x - \frac{\partial}{\partial x}F_z\right)\boldsymbol{e}_y$$
$$= \left(\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{4x}{\left(\sqrt{2x^2+z^2}\right)^7}(-z) - \left(-\frac{5}{2}\right)\frac{2z}{\left(\sqrt{2x^2+z^2}\right)^7}(-2x)\right)\boldsymbol{e}_y$$
$$= 0$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{F}$ konservativ.

(b) Wegintegration von $\infty \to (x,z)$ entlang $\boxed{3}$

$$\boldsymbol{s} = t\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z\end{pmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{s}} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{ds} = dt\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z\end{pmatrix}:$$

$$V(x,y) = -\int_\infty^{(x,0,z)} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{ds} = -\int_\infty^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}(t))\cdot\dot{\boldsymbol{s}}(t)dt$$
$$= -\int_\infty^1 \frac{1}{\left(\sqrt{(2tx)^2+(tz)^2}\right)^5}\begin{pmatrix} -2xt \\ 0 \\ -zt\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z\end{pmatrix}dt$$
$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2x^2+z^2}\right)^3}\int_\infty^1 \frac{1}{t^4}dt$$
$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2x^2+z^2}\right)^3}\left[-\frac{1}{3}t^{-3}\right]_\infty^1 = -\frac{1}{3}\frac{1}{\left(\sqrt{2x^2+z^2}\right)^3}$$

(c) Keine der Drehimpulskomponenten bleibt erhalten, da das Potential keine Rotationssymmetrie besitzt. $\boxed{1}$

2. Erzwungene Schwingungen (6 Punkte)

(a) Ansatz $x = X_0 e^{i\omega t}$ für $\boxed{3}$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = e^{i\omega t}$$

ergibt

$$(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)X_0 = 1$$

oder

$$X_0 = \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \equiv x_0 e^{i\alpha}$$

Somit ergibt sich auch für die reelle Lösung der reellen Gleichung

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \sin(\omega t)$$

die Lösung

$$x = x_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

mit

$$x_0 = |X_0| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}, \quad \tan\alpha = -\frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Für den Spezialfall $\omega = 2\omega_0$ ergibt sich

$$x_0 = |X_0| = \frac{1}{\omega_0\sqrt{(3\omega_0)^2 + (2\gamma)^2}}, \quad \tan\alpha = \frac{2\gamma}{3\omega_0}$$

(b) Allgemein: $\boxed{3}$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t-t') f(t')$$

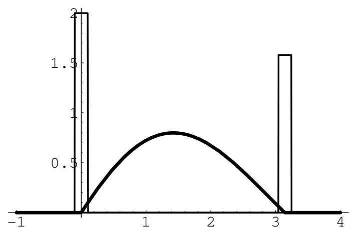
Mit $f(t) = \delta(t) + c\delta(t - \frac{T}{2})$:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, G(t-t')\left(\delta(t') + c\delta(t' - \tfrac{T}{2})\right) \\
&= G(t) + c\, G(t - \tfrac{T}{2}) \\
&= \theta(t)\,\frac{1}{\Omega}\,\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\sin\Omega t + c\,\theta\big(t - \tfrac{T}{2}\big)\,\frac{1}{\Omega}\,\exp\left(-\frac{\gamma(t-\frac{T}{2})}{2}\right)\sin\Omega\left(t - \frac{T}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\Omega}\left(\theta(t) - c\,\theta\big(t - \tfrac{T}{2}\big)\,\exp\left(\frac{\gamma T}{4}\right)\right)\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\sin\Omega t
\end{aligned}$$

Trivialerweise $x(t) = 0$ für $t < 0$. $x(t) = 0$ für $t > \frac{T}{2}$ falls

$$1 - c\,\exp\left(\frac{\gamma T}{4}\right) = 0,$$

also wenn $c = \exp\left(-\frac{\gamma T}{4}\right)$.



(Die Deltafunktionen müssen nicht angedeutet werden.)

3. Zweikörperproblem (7 Punkte)

(a) Bewegungsgleichungen: $\boxed{1}$

$$-m_1\ddot{x}_1 + k(x_2 - x_1 - a) = 0$$
$$-m_2\ddot{x}_2 - k(x_2 - x_1 - a) = 0$$

(b) Schwerpunktskoordinate: $\boxed{2}$

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

Relativkoordinate:

$$x = x_2 - x_1 \tag{2}$$

Umgeformt:

$$x_1 = X - \frac{m_2}{m_1 + m_2}x, \quad x_2 = X + \frac{m_1}{m_1 + m_2}x$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichungen:

$$-m_1\ddot{X} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{x} + k(x - a) = 0 \tag{3}$$

$$-m_2\ddot{X} - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{x} - k(x - a) = 0 \tag{4}$$

Addition (3)+(4) ergibt:

$$(m_1 + m_2)\ddot{X} = 0 \quad \text{also} \quad \ddot{X} = 0.$$

Eingesetzt in (3):

$$m^*\ddot{x} + k(x - a) = 0 \qquad \text{wobei} \quad m^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

(c) Schwerpunktskoordinate (freies Teilchen): $\boxed{2}$

$$X = X_0 + Vt$$

Relativkoordinate (Harmonische Oszillatorschwingung um $x = a$):

$$x = a + A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t \quad \text{wobei } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m^*}}$$

X_0, V, A, B sind freie Parameter.

(d) Anfangsbedingungen für Schwerpunktskoordinate: aus (1) $\boxed{2}$

$$X(0) = \frac{m_1(-a)}{m_1+m_2}, \quad \dot{X}(0) = \frac{m_1 v_0}{m_1+m_2} \quad \Rightarrow \quad X(t) = \frac{m_1(-a+v_0 t)}{m_1+m_2}$$

Anfangsbedingungen für Relativkoordinate: aus (2)

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = -v_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = a - \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

Somit

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X - \frac{m_2}{m_1+m_2}x = -a + \frac{m_1}{m_1+m_2}\,v_0 t + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \\ x_2(t) &= X + \frac{m_1}{m_1+m_2}x = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left(v_0 t - \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right) \end{aligned}$$

4. Keplerproblem und Lenzscher Vektor (6 Punkte)

Lenzscher Vektor für $F(r) = -k/r^2$, ausgedrückt durch $r(t)$ und $\phi(t)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \frac{1}{k}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - \frac{1}{r}\mathbf{r} \\ &= \frac{\mu}{k}\begin{pmatrix} \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \\ \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\dot{\phi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu}{k}\begin{pmatrix} r^2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi + r^3\dot{\phi}^2\cos\phi \\ -r^2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + r^3\dot{\phi}^2\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies ist konstant gleich $(\epsilon, 0, 0)$. Zusammen mit der Drehimpulserhaltung ergibt das die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} L &= \mu r^2\dot{\phi} \\ \epsilon &= \frac{\mu}{k}r^2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi + \left(\frac{\mu}{k}r^3\dot{\phi}^2 - 1\right)\cos\phi \\ 0 &= -\frac{\mu}{k}r^2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + \left(\frac{\mu}{k}r^3\dot{\phi}^2 - 1\right)\sin\phi \end{aligned}$$

Einsetzen der ersten in die beiden anderen Gleichungen liefert mit $p = \dfrac{L^2}{\mu k}$:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{L}{k}\dot{r}\sin\phi + \left(\frac{p}{r} - 1\right)\cos\phi \\ 0 &= -\frac{L}{k}\dot{r}\cos\phi + \left(\frac{p}{r} - 1\right)\sin\phi \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $\cos\phi$ und die zweite mit $\sin\phi$ und addiert man beide Zeilen, so erhält man

$$\epsilon\cos\phi = \frac{p}{r} - 1,$$

also

$$r = \frac{p}{1+\epsilon\cos\phi}.$$