1. Klausur zur Vorlesung Theoretische Physik A
Universität Karlsruhe WS 2004/05

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

Hinweis: Beginnen Sie bitte jede Klausuraufgabe auf einem neuen Blatt. Als Hilfsmittel ist ein handbeschriebenes A4-Blatt zugelassen. Die Rückgabe der Klausur findet am 22. 12.04 von 15:00-16:00 im Raum 3.1 statt. Die Besprechung der Klausur findet am 07.01.2005 in den Tutorien statt.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Integrale:

Berechnen Sie mittels partieller Integration die Integrale

$$\int \mathrm{d}x \; xe^{-x}, \qquad \int \mathrm{d}\phi \; \cos^2(\phi)$$

und mittels Partialbruchzerlegung das Integral

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \; \frac{1}{(x+1)(x-3)}.$$

(Logarithmen brauchen Sie nicht numerisch anzugeben.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Komplexe Zahlen:

Berechnen Sie (d.h. bringen Sie die Ausdrücke in die Form $a + ib$ mit reellen a und b)

$$i^4(i+2)^2 \qquad (3+i)(4-2i), \qquad e^{i\frac{\pi}{2}}, \qquad \frac{1+i}{1-i}\,.$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Trennung der Variablen:

Die Bewegungsgleichung für ein relativistisches Teilchen in einem konstanten Kraftfeld lautet

$$M(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F \cdot t, \qquad M(t) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2}} \tag{1}$$

wobei $F > 0$ die konstante Kraft, m eine konstante Masse und c die konstante Lichtgeschwindigkeit ist.

a) Lösen Sie zunächst die Bewegungsgleichung nach $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ auf (nachdem Sie den Ausdruck für $M(t)$ in diese einsetzen). (1 Punkt)

b) Geben Sie das asymptotische Verhalten von $v(t) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ für $t \to \infty$ und für $t \to 0$ an, indem Sie im Ergebnis von a) die rechte Seite für große und kleine t betrachten. (2 Punkte)

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung, indem Sie im Ergebnis von a) das Verfahren der Trennung der Variablen anwenden. Die Anfangsbedingung laute $x(t = 0) = 0$.
Hinweis: Beim Berechnen des auftretenden Integrals hilft eine Substitution der Art $\tau = \text{konst.} \cdot t^2$ weiter. (3 Punkte)

d) Skizzieren Sie $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ und $x(t)$ als Funktion der Zeit unter Beachtung der asymptotischen Regionen. (2 Punkte)

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Harmonischer Oszillator:

a) Geben Sie die Lösung der homogenen Bewegungsgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \tag{2}$$

mit $\gamma < \omega_0$ (unterdämpfter Fall) mit den Anfangsbedingungen $x(t=0) = 0$, $\dot{x}(t=0) = v_0$ an. (4 Punkte)

b) Es sei nun eine treibende Kraft der Form $F = F_0 \cos(\omega t)$ vorhanden. Zeichnen Sie qualitativ die Amplitude der partikulären Lösung als Funktion der Frequenz ω der treibenden Kraft. (1 Punkt)

c) Geben Sie die Lösung der homogenen Bewegungsgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator im überdämpften Fall $\gamma > \omega_0$ mit den Anfangsbedingungen $x(t=0) = 0$, $\dot{x}(t=0) = v_0$ an. (3 Punkte)

Aufgabe 5 (7 Punkte)

LCR-Kreis mit δ-Puls:

Eine δ-artige Radiowelle werde zum Zeitpunkt $t = 0$ auf einen LCR-Kreis mit Antenne eingestrahlt und induziere einen Spannungspuls $V(t) = V_0\delta(t)$. Die Gleichung für die Ladung des Kondensators lautet:

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + Q(t)/C = V_0\,\delta(t)\ . \tag{3}$$

Betrachten Sie zunächst den Fall $L = 0$:

a) Bestimmen Sie aus (3) die Fouriertransformierte $\tilde{Q}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} Q(t)$ der Ladung. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie $Q(t)$ durch Rücktransformation und skizzieren Sie das Ergebnis. (3 Punkte)

Hinweis: Für $x > 0$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi i} \cdot \frac{e^{i\omega t}}{\omega - ix} = \theta(t)\, e^{-xt} \tag{4}$$

Betrachten Sie nun den Fall $L \neq 0$, mit schwacher Dämpfung $R < 2\sqrt{L/C}$.

c) Bestimmen Sie wieder $\tilde{Q}(\omega)$. (1 Punkt)

d) Skizzieren Sie $|\tilde{Q}(\omega)|$ für $R \ll 2\sqrt{L/C}$. Bei welcher Frequenz liegt das Maximum? (1 Punkt)