Lösungsvorschlag zur ersten Klausur Theoretische Physik A: Klassische Mechanik

Prof. Dr. Schön und Dr. Eschrig

Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 1 $\boxed{\textbf{3 Punkte}}$

a.)

Das Integral kann geschickt mit partieller Integration gelöst werden:

$$\int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\exp(-x)}_{u'}\,\mathrm{d}x = -\underbrace{\exp(-x)}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v}\Big| + \int \underbrace{\exp(-x)}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'}\,\mathrm{d}x = \boxed{-\exp(-x)\cdot(1+x)} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

b.)

Auch hier ist partielle Integration sinnvoll:

$$\int \cos^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \int \underbrace{\cos\varphi}_{u} \cdot \underbrace{\cos\varphi}_{v'}\,\mathrm{d}\varphi = \underbrace{\sin\varphi}_{v} \cdot \underbrace{\cos\varphi}_{u}\Big| + \int \underbrace{\sin\varphi}_{u'} \cdot \underbrace{\sin\varphi}_{v}\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \sin\varphi\cdot\cos\varphi| + \int \left(1-\cos^2\varphi\right)\,\mathrm{d}\varphi = \sin\varphi\cdot\cos\varphi| + \varphi| - \int \cos^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Nun müssen wir nur noch das Integral auf der rechten Seite nach links bringen und durch zwei dividieren:

$$\int \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \boxed{\frac{1}{2}\cdot(\varphi+\sin\varphi\cdot\cos\varphi) = \frac{1}{2}\cdot\left(\varphi+\frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)\right)} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Eine andere Möglichkeit, das Integral zu berechnen, ist, die Beziehung $\cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1$ auszunutzen. Damit gilt nämlich:

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\cdot(1+\cos(2\varphi)) \Rightarrow \int \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \boxed{\frac{1}{2}\cdot\left(\varphi+\frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)\right)} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Es gibt unabhängig von der gewählten Rechnung einen Punkt.

c.)

Dieses Integral lösen wir durch Partialbruchzerlegung:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\cdot(x-3)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cdot\int_0^1 \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3}\right]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\left[\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\right] = \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}\cdot(\ln(1)-\ln(3)) = \boxed{-\frac{1}{4}\ln(3)}$$

Aufgabe 2 $\boxed{\textbf{4 Punkte}}$

- Ausdruck ①:

  $$\mathrm{i}^4\cdot(\mathrm{i}+2)^2 = (-1)^2\cdot(\mathrm{i}^2+4\mathrm{i}+4) = -1+4\mathrm{i}+4 = \boxed{3+4\mathrm{i}} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

- Ausdruck ②:

  $$(3+\mathrm{i})\cdot(4-2\mathrm{i}) = 12-6\mathrm{i}+4\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2 = 12-2\mathrm{i}-2\cdot(-1) = \boxed{14-2\mathrm{i}} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

* Ausdruck ③:

$$\exp\left(\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\boxed{\mathrm{i}}$$ 1 Punkt

* Ausdruck ④:

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(1+\mathrm{i})\cdot(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})\cdot(1+\mathrm{i})}=\frac{1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1+1}=\frac{2\mathrm{i}}{2}=\boxed{\mathrm{i}}$$ 1 Punkt

Aufgabe 3 — 8 Punkte

a.)

Wir setzen die zeitabhängige Masse $M(t)$ in die Bewegungsgleichung $M(t)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F\cdot t$ ein und lösen nach $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ auf:

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=F\cdot t$$

Durch Quadrieren ergibt sich:

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=\left(\frac{F\cdot t}{m}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)\Leftrightarrow\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\cdot\left[1+\left(\frac{F\cdot t}{m\cdot c}\right)^2\right]=\left(\frac{F\cdot t}{m}\right)^2$$

$$\boxed{\dot{x}\equiv\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{F\cdot t}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t}{m\cdot c}\right)^2}}}$$ 1 Punkt

$\dot{x}$ muss positiv sein, da das Vorzeichen von $\dot{x}$ nach obiger Bewegungsgleichung dasselbe wie von $F\cdot t$ (mit $F>0$) ist.

b.)

* Fall ①: $t\mapsto\infty$:

  Man kann im Prinzip die 1 unter der Wurzel gegenüber dem quadratischen Term von t vernachlässigen:

$$\dot{x}\approx\frac{F\cdot t}{m}\cdot\frac{1}{\left|\frac{F\cdot t}{m\cdot c}\right|}=c\cdot\frac{F}{|F|}=c\cdot\operatorname{sign}(F)=\boxed{c}$$ 1 Punkt

  Es ist $\operatorname{sign}(F)=1$, da $F>0$ ist.

* Fall ②: $t\mapsto 0$:

  Umgekehrt kann man hier den quadratischen Term von t gegenüber der 1 unter der Wurzel vernachlässigen:

$$\dot{x}\approx\boxed{\frac{F\cdot t}{m}}$$ 1 Punkt

c.)

Wir wollen die Differentialgleichung aus Aufgabenteil a.) lösen. Dazu trennen wir die Veränderlichen x und t und integrieren auf beiden Seiten unter Beachtung der Anfangsbedingung $x(t=0)=0$:

$$\int\limits_{x(t=0)=0}^{x}\mathrm{d}x'=\int\limits_0^t\frac{F\cdot t'}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t'}{m\cdot c}\right)^2}}\,\mathrm{d}t'$$ 1 Punkt

$$x(t)=\frac{F}{m}\cdot\int\limits_0^t\frac{t'}{\sqrt{1+\left(\frac{F}{m\cdot c}\right)^2\cdot t'^2}}\,\mathrm{d}t'$$

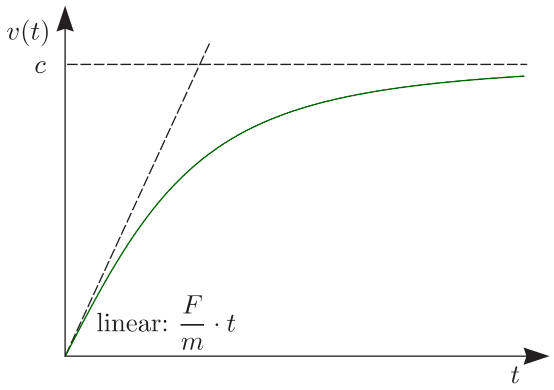
Wir verwenden die Substitution $\tau = t'^2$, $\mathrm{d}\tau = 2t'\,\mathrm{d}t'$:

$$x(t) = \frac{F}{2m} \cdot \int\limits_0^{t^2} \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1 + \left(\frac{F}{m\cdot c}\right)^2 \cdot \tau}} = \frac{F}{2m} \cdot 2 \cdot \left(\frac{m\cdot c}{F}\right)^2 \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{F}{m\cdot c}\right)^2 \cdot t^2} - 1\right] =$$

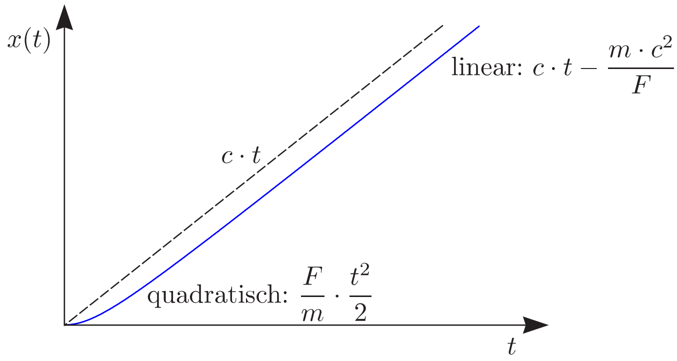
$$= \boxed{\frac{m\cdot c^2}{F} \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{F\cdot t}{m\cdot c}\right)^2} - 1\right]} = c \cdot \left[\sqrt{\left(\frac{m\cdot c}{F}\right)^2 + t^2} - \frac{m\cdot c}{F}\right]$$

2 Punkte

d.)



1 Punkt



1 Punkt

Aufgabe 4 — 8 Punkte

a.)

Die allgemeine Lösung des unterdämpften harmonischen Oszillators ist gegeben durch:

$x(t) = A \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$ mit $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ — 1 Punkt

Aus den Bedingungen $x(t=0) = 0$ und $\dot{x}(t=0) = v_0$ erhalten wir:

$x(t=0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow A \cdot \cos(\varphi) = 0$

$\dot{x}(t=0) = -\gamma \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \underbrace{A \cdot \cos(\varphi)}_{=0} - A \cdot \Omega \cdot \sin(\varphi) \stackrel{!}{=} v_0$

Hieraus folgt also:

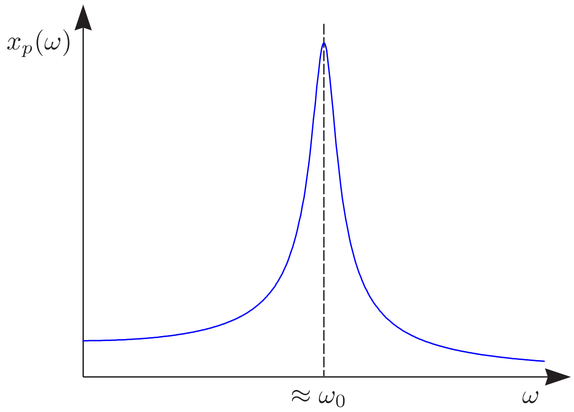
$\boxed{\cos(\varphi) = 0,\ \sin(\varphi) = -1}$ — 1 Punkt

$\boxed{A = \frac{v_0}{\Omega}}$ — 1 Punkt

Als Lösung erhalten wir:

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\Omega} \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \sin(\Omega \cdot t)}$$ 1 Punkt

b.)



1 Punkt

c.)

Im überdämpften Fall gilt folgende allgemeine Lösung:

$$x(t) = \exp(-\gamma \cdot t) \cdot [A \cdot \exp(\Omega' \cdot t) + B \cdot \exp(-\Omega' \cdot t)] \text{ mit } \Omega' = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$ 1 Punkt

Werten wir nun wieder die Anfangsbedingungen aus:

$$x(t=0) \stackrel{!}{=} 0 = A + B \Rightarrow \boxed{A = -B}$$

$$\dot{x}(t=0) = -\gamma \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot (A+B) + \Omega' \cdot (A - B) = 2 \cdot A \cdot \Omega' \stackrel{!}{=} v_0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{v_0}{2\Omega'}}$$ 1 Punkt

Als Lösung ergibt sich damit:

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{2\Omega'} \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot [\exp(\Omega' \cdot t) - \exp(-\Omega' \cdot t)]}$$ 1 Punkt

Aufgabe 5 — 7 Punkte

a.)

Durch FOURIER-Transformation erhalten wir aus der Differentialgleichung für den LCR-Kreis folgende algebraische Gleichung:

$$\left(-L \cdot \omega^2 + \mathrm{i}\omega \cdot R + \frac{1}{C}\right) \widetilde{Q}(\omega) = V_0$$ 1 Punkt

$\widetilde{Q}(\omega)$ ist hierbei die FOURIER-Transformierte von $Q(t)$. Wir lösen nach $\widetilde{Q}(\omega)$ auf, wobei in diesem Falle $L = 0$ sei:

$$\boxed{\widetilde{Q}(\omega) \underset{L=0}{=} \frac{V_0 \cdot C}{1 + \mathrm{i}\omega RC}} = \frac{V_0}{\mathrm{i}R} \cdot \frac{1}{\omega - \frac{\mathrm{i}}{RC}}$$ 1 Punkt

b.)

Durch Rücktransformation erhalten wir $Q(t)$:

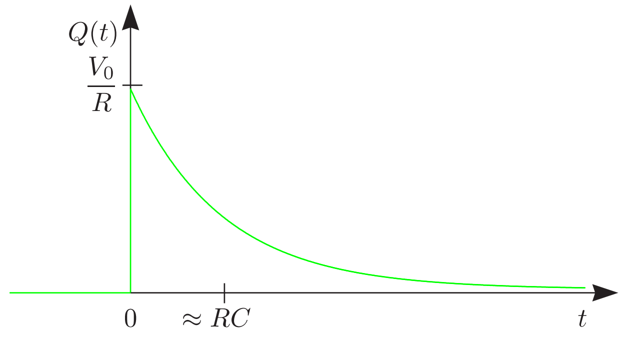
$$Q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \exp(\mathrm{i}\omega t) \cdot \widetilde{Q}(\omega) = \frac{V_0}{R} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi\mathrm{i}} \frac{\exp(\mathrm{i}\omega t)}{\omega - \frac{\mathrm{i}}{RC}}$$ 1 Punkt

Hieraus ergibt sich

$$\boxed{Q(t) = \frac{V_0}{R} \cdot \theta(t) \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}$$ 1 Punkt

unter Verwendung von:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi \mathrm{i}} \frac{\exp(\mathrm{i}\omega t)}{\omega - \mathrm{i}x} = \theta(t) \cdot \exp(-x \cdot t) \text{ mit } x > 0$$



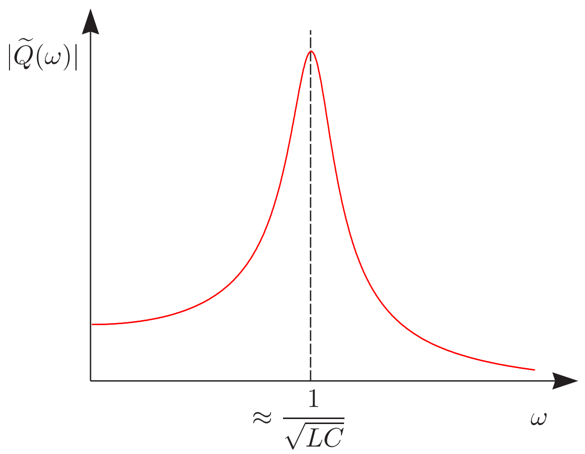
1 Punkt

c.)

Hier sei nun $L \neq 0$:

$$\widetilde{Q}(\omega) = \boxed{\frac{V_0}{-L \cdot \omega^2 + \mathrm{i}\omega \cdot R + \frac{1}{c}}} = \frac{V_0 \cdot C}{\mathrm{i}\omega \cdot RC + 1 - LC \cdot \omega^2} = \frac{V_0}{\mathrm{i}R} \cdot \frac{1}{\omega - \frac{\mathrm{i}}{RC} + \frac{\mathrm{i} \cdot L\omega^2}{R}}$$ 1 Punkt

d.)



1 Punkt

<u>Begründung (nicht erforderlich):</u>

Es ist $R \ll 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$ (oder auch $RC \ll 2\sqrt{LC}$).

$$\widetilde{Q}(\omega) = \frac{V_0 C}{-(\sqrt{LC} \cdot \omega)^2 + \mathrm{i} \cdot (RC \cdot \omega) + 1}$$

Das Maximum liegt bei $1 = \sqrt{LC} \cdot \omega$ für $RC \ll \sqrt{LC}$.