Lösungsvorschlag zur zweiten Klausur Theoretische Physik A: Klassische Mechanik

Prof. Dr. Schön und Dr. Eschrig

Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 1 $\boxed{\textbf{9 Punkte}}$

a.)

Gegeben ist die Kraft $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{e}_x yz + \vec{e}_y xz + \vec{e}_z xy$. Wir berechnen die Rotation von $\vec{F}$:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}yz\\ xz\\ xy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_y(xy)-\partial_z(xz)\\ \partial_z(yz)-\partial_x(xy)\\ \partial_x(xz)-\partial_y(yz)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-x\\ y-y\\ z-z\end{pmatrix} = \boxed{\vec{o}} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Da $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{o}$ gilt, ist $\vec{F}$ konservativ. $\boxed{\text{1 Punkt}}$
Somit existiert ein **skalares** Potential U, so dass $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ ist:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\begin{pmatrix}\partial_x U\\ \partial_y U\\ \partial_z U\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-yz\\ -xz\\ -xy\end{pmatrix}$$

Durch Integration der ersten Komponente nach x ergibt sich $U = -yzx + F_1(y,z)$. Man muss bei der Integration also eine Funktion hinzufügen, die nicht von x, sondern nur von y und z abhängt. Diese Funktion fällt nämlich bei der partiellen Differentiation nach x wieder weg. Integrieren wir nun die zweite Komponente, so folgt analog $U = -xzy + F_2(x,z)$, mit dem Unterschied, dass wir nun eine Funktion, die nicht von y abhängt, hinzufügen. Das Potential muss natürlich für beide Fälle gleich sein und damit ergibt sich $F_1(y,z) = F_2(x,z)$. Dies ist nur dann erfüllbar, wenn F_1 und F_2 nur von z abhängen; wir bezeichnen die neue Funktion als $G_1(z)$. Bei der Integration der dritten Komponente folgt $U = -xyz + F_3(x,y)$. Durch Vergleich der zweiten und dritten Beziehung für U ergibt sich $F_2(x,z) = F_3(x,y)$ und analog zu vorher $F_2(x,z) = F_3(x,y) \equiv G_2(x)$. Nun muss natürlich noch $G_1(z) = G_2(x)$ sein, was nur funktioniert, wenn $G_1(z) = C = G_2(x)$, wobei C eine Konstante ist, die weder von x noch von y oder z abhängt. Also gilt:

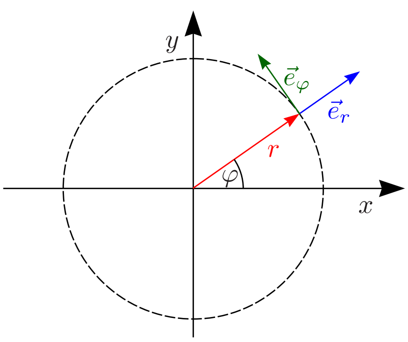
$$\boxed{U = -xyz + C} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

b.)

Wir gehen aus von der Kraft $\vec{F} = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y$. Für die Einheitsvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ der Zylinderkoordinaten gilt in Abhängigkeit der kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$, also der kartesischen Basis:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x\cos\varphi + \vec{e}_y\sin\varphi$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x\sin\varphi + \vec{e}_y\cos\varphi$$



Außerdem gilt in Zylinderkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und damit:

$\vec{F} = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y = r\sin\varphi\vec{e}_x - \cos\varphi\vec{e}_y = -r\vec{e}_\varphi$

Für einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Ursprung des Koordinatensystems ist, gilt $\mathrm{d}\vec{r} = r\,\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$. Der Einheitskreis ist der spezielle Kreis mit Radius eins, also folgt für diesen $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$. Wir können auf diese Weise das Wegintegral berechnen:

$$I = \int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi \cdot (-r\vec{e}_\varphi) = -\int_0^{2\pi} r^2\,\mathrm{d}\varphi = -2\pi r^2 \overset{r=1}{=} \boxed{-2\pi} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Zur Berechnung des Flächenintegrals benötigen wir:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \boxed{-2\vec{e}_z} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Damit ergibt sich weiter:

$$\int_{A_0} \mathrm{d}A\,\vec{e}_z \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \int_{A_0} \mathrm{d}A\,(-2\vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z = -2A_0 = -2\pi r^2 \overset{r=1}{=} \boxed{-2\pi} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

c.)

Wir betrachten folgenden Vorgang:

Da es sich um einen zentralen Stoß handelt, findet der Prozess in einer Dimension statt. Außerdem gilt $v_1^f < v_2^f$. Der Stoß ist außerdem elastisch, womit sowohl Impulserhaltung als auch Energieerhaltung gilt:

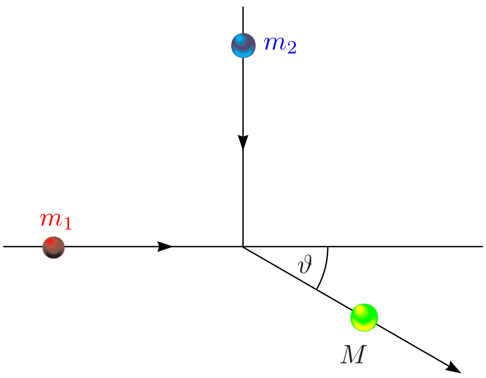
- Impulserhaltung: $v_1^i = v_1^f + v_2^f \qquad (1)$
- Energieerhaltung:

$$\frac{m}{2}{v_1^i}^2 = \frac{m}{2}{v_1^f}^2 + \frac{m}{2}{v_2^f}^2 \Leftrightarrow {v_1^i}^2 = {v_1^f}^2 + {v_2^f}^2 \qquad (2)$$

Durch Quadrieren von Gleichung (1) und Vergleich mit Gleichung (2) ergibt sich $v_1^f v_2^f = 0$. Es ist also entweder $v_1^f = 0$ und $v_2^f = v_1^i$ oder $v_2^f = 0$ und $f_1^f = v_1^i$. Da $v_1^f < v_2^f$ ist, ergibt sich:

$$\boxed{v_1^f = 0 \text{ und } v_2^f = v_1^i} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

d.)



Da der Stoß total inelastisch verläuft, trennen sich die beiden Körper nach dem Stoßprozess nicht mehr voneinander. Es entsteht ein Körper der Masse $M = m_1 + m_2$. Bei einem inelastischen Stoß gilt **nur Impulserhaltung**, aber **keine Energieerhaltung**. Wir werten die Impulserhaltung für die x- und y-Richtung aus:

- ⁕ x-Richtung:

  $$m_1 v_1 = M v \cos\vartheta \Rightarrow m_1^2 v_1^2 = M^2 v^2 \cos^2\vartheta$$ 0,5 Punkte

- ⁕ y-Richtung:

  $$m_2 v_2 = M v \sin\vartheta \Rightarrow m_2^2 v_2^2 = M^2 v^2 \sin^2\vartheta$$ 0,5 Punkte

Wir formen die erste Gleichung mit $\cos^2\vartheta = 1 - \sin^2\vartheta$ um und setzen die zweite Gleichung ein:

$$m_1^2 v_1^2 = M^2 v^2 \cdot \cos^2\vartheta = M^2 v^2 \cdot (1 - \sin^2\vartheta) = M^2 v^2 - M^2 v^2 \sin^2\vartheta = M^2 v^2 - m_2^2 v_2^2$$

Wir lösen nach v^2 auf:

$$v^2 = \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}{M^2} \Rightarrow \boxed{v = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}}{m_1 + m_2}}$$ 1 Punkt

Aufgabe 2 — 4 Punkte

a.)

Wir gehen aus von der Differentialgleichung des harmonischen Oszillators:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \exp(\mathrm{i}\omega t) f(\omega)$$

Wir schreiben hierbei die äußere Kraft $f(t)$ als Fourier-Rücktransformierte von $\widetilde{f}(\omega)$ und $x(t)$ als Rücktransformierte von $\widetilde{x}(\omega)$:

$$x(t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \exp(\mathrm{i}\omega t) \widetilde{x}(\omega)$$

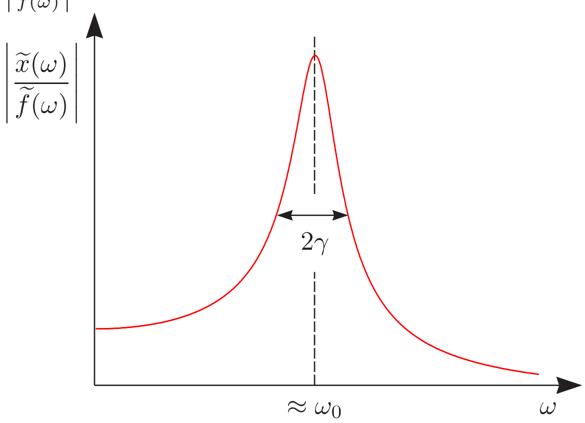
Damit geht unsere Differentialgleichung über in:

$$(-\omega^2 + 2\mathrm{i}\gamma\omega + \omega_0^2)\widetilde{x}(\omega) = \widetilde{f}(\omega)$$

Diese Gleichung lässt sich nun nach $\widetilde{x}(\omega)$ auflösen:

$$\boxed{\widetilde{x}(\omega) = \frac{\widetilde{f}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\mathrm{i}\gamma\omega} \quad \text{mit} \quad \left|\frac{\widetilde{x}(\omega)}{\widetilde{f}(\omega)}\right| = \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]^{-\frac{1}{2}}}$$ 1 Punkt

$\left|\frac{\widetilde{x}(\omega)}{\widetilde{f}(\omega)}\right|$ hat die Form einer Resonanzkurve:



1 Punkt

b.)

Als erstes müssen wir die FOURIER-Transformierte der äußerem Kraft $f(t) = f\cos(\omega_1 t)$ ausrechnen:

$$\boxed{\widetilde{f}(\omega) = \pi f\left[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)\right]}$$ 1 Punkt

Dann erhalten wir damit $x(t)$ durch FOURIER-Rücktransformation von $\widetilde{x}(\omega)$:

$$x(t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\exp(\mathrm{i}\omega t)\widetilde{f}(\omega)\left[(\omega_0^2-\omega^2)+2\mathrm{i}\gamma\omega\right]^{-1} =$$

$$= \boxed{\frac{f}{2}\left[\frac{\exp(\mathrm{i}\omega_1 t)}{\omega_0^2-\omega_1^2+2\mathrm{i}\gamma\omega_1}+\frac{\exp(-\mathrm{i}\omega_1 t)}{\omega_0^2-\omega_1^2-2\mathrm{i}\gamma\omega_1}\right]} =$$ 1 Punkt

$$= \boxed{\frac{f}{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4\gamma^2\omega_1^2}\left[(\omega_0^2-\omega_1^2)\cos(\omega_1 t)+2\gamma\omega_1\sin(\omega_1 t)\right]}$$

Aufgabe 3 — 12 Punkte

a.)

Mit der Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ schreiben wir die Kraft als:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -a\frac{\vec{r}}{r^4} = -a\frac{\hat{e}_r}{r^3}$$

Das zugehörige Potential lautet:

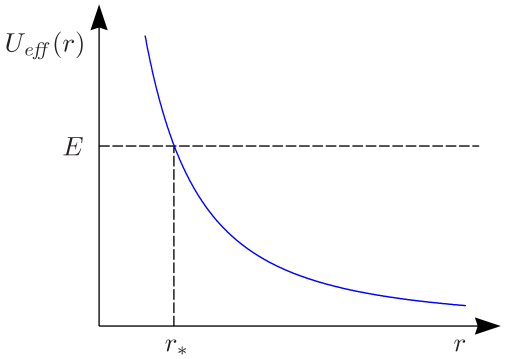
$$U(r) = -\frac{1}{2}\frac{a}{r^2} \quad \text{denn } \vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

Als effektives Potential folgt damit:

$$\boxed{U_{\mathit{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{a}{2r^2} = \frac{c}{r^2} \text{ mit } c = \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{\mu}-a\right)}$$ 2 Punkte

b.)

Das effektive Potential ist eine Funktion proportional zu $\frac{1}{r^2}$, sieht also folgendermaßen aus:



2 Punkte

Es ist $L > 0$ und $E > 0$. Energieerhaltung verbietet, dass $E < U_{\mathit{eff}}(r)$ ist. Deswegen kann r nie kleiner als r_* werden, womit die Teilchen nie zusammenstoßen. 1 Punkt

Wir erhalten r_* aus:

$$U_{\mathit{eff}}(r_*) = E \Rightarrow \boxed{r_* = \sqrt{\frac{C}{E}}}$$ 1 Punkt

c.)

Die Gesamtenergie E ergibt sich aus der kinetischen Energie und dem effektiven Potential:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{eff}$$

Wir lösen nach $\dot{r}$ auf und erhalten:

$$\dot{r} = \pm\left(\frac{2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left[E - \frac{c}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$ 1 Punkt

Dabei handelt es sich um eine Differentialgleichung 1.Ordnung für $r(t)$ die wir durch Trennung der Veränderlichen und anschließende Integration lösen:

$$\int \mathrm{d}t = \pm\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\int \mathrm{d}r\,\frac{r}{\sqrt{r^2E - c}}$$

Mit dem angegebenen Integral ergibt sich hieraus:

$$t - t_* = \pm\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{r^2E - c}}{E}$$ 1 Punkt

Wir lösen schließlich nach $r(t)$ auf:

$$\boxed{r(t) = \sqrt{\frac{2E}{\mu}(t - t_*)^2 + \frac{c}{E}}\text{ mit } r(t_*) = \sqrt{\frac{c}{E}} = r_*}$$ 1 Punkt

t_* ist also die Zeit der kleinsten Annäherung.

d.)

Wir gehen aus vom erhaltenen Drehimpuls:

$$L = \mu r^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\dot{r} = \frac{L}{\mu r^2}$$

Wir erhalten damit:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mu}{2}r^2\dot{r} = \pm\frac{(2\mu)^{\frac{1}{2}}}{L}r\left(r^2E - c\right)^{\frac{1}{2}}}$$ 1 Punkt

Auch hier handelt es sich analog zur vorher um eine Differentialgleichung 1.Ordnung, dieses mal aber für die Bahnkurve $r(\varphi)$. Durch Trennung der Veränderlichen und Integration erhalten wir wieder:

$$\int \mathrm{d}\varphi = \pm\frac{L}{(2\mu)^{\frac{1}{2}}}\int \mathrm{d}r\,\frac{1}{r\left[r^2E - c\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\varphi - \varphi_* = \pm\frac{L}{(2\mu c)^{\frac{1}{2}}}\cdot\arccos\left(\sqrt{\frac{c}{E}}\cdot\frac{1}{r}\right)$$ 1 Punkt

$$\boxed{r(\varphi) = \sqrt{\frac{c}{E}}\cdot\frac{1}{\cos\left[(\varphi - \varphi_*)\cdot\frac{(2\mu c)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]}}$$ 1 Punkt

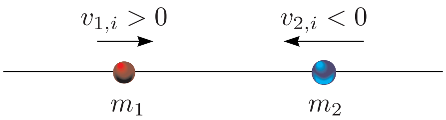
Es gilt

$$r(\varphi_*) = \sqrt{\frac{c}{E}}$$

womit φ_* der Winkel der kleinsten Annäherung ist.

Aufgabe 4 **5 Punkte**

a.)



Die Schwerpunktmasse ist die Gesamtmasse des Systems, also $M = m_1 + m_2$. Damit ergibt sich die Geschwindigkeit des Schwerpunkts:

$$\boxed{V = \frac{1}{M}\left(m_1 v_{1a} + m_2 v_{2a}\right)}$$

1 Punkt

V ist die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts. Die zugehörige GALILEI-Transformation ins Schwerpunktsystem lautet:

$$\boxed{v'_{ja} = v_{ja} - V \text{ für } j = 1,\, 2}$$

1 Punkt

b.)

Im Schwerpunktsystem ist die kinetische Energie **jedes einzelnen** Teilchens erhalten; es gilt also für die Endgeschwindigkeiten:

$$\boxed{v'_{je} = -v'_{ja} \text{ für } j = 1,\, 2}$$

1 Punkt

Die Geschwindigkeiten v'_{je} sind negativ, weil die Teilchen zurückprallen.

c.)

Durch Rücktransformation ergibt sich:

$$v_{je} = v'_{je} + V = -v'_{ja} + V = \boxed{-v_{ja} + 2V}$$

1 Punkt

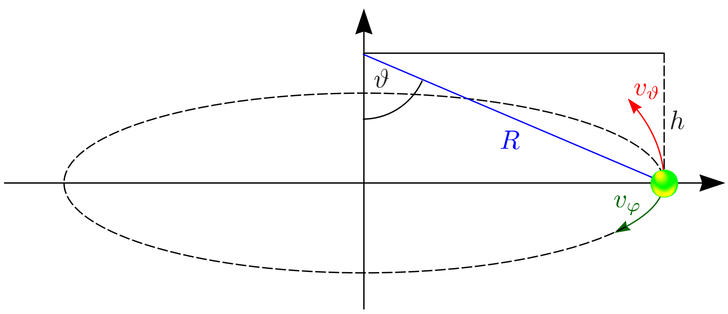
Setzen wir nun noch den obigen Ausdruck für V explizit ein, so erhalten wir das Ergebnis:

$$v_{1e} = -v_{1a} + 2\left(\frac{m_1 v_{1a} + m_2 v_{2a}}{m_1 + m_2}\right) = \boxed{\frac{m_1 v_{1a} + m_2(2v_{2a} - v_{1a})}{m_1 + m_2}}$$

$$v_{2e} = -v_{2a} + 2\left(\frac{m_1 v_{1a} + m_2 v_{2a}}{m_1 + m_2}\right) = \boxed{\frac{m_2 v_{2a} + m_1(2v_{1a} - v_{2a})}{m_1 + m_2}}$$

1 Punkt

Aufgabe 5 (Bonusaufgabe) **5 Zusatzpunkte**



a.)

Es wirkt keine Kraft in φ-Richtung, womit L_z erhalten ist.
oder: $\boxed{\text{1 Punkt}}$
Die Gewichtskraft gibt kein Drehmoment in z-Richtung, womit L_z erhalten ist.
[Genauere Begründung (war nicht gefordert): $\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} = R(\vec{e}_r \times \vec{F})$; die Kraft setzt sich zusammen aus $\vec{F} = -mg\vec{e}_z - F_{zp}\vec{e}_r$, wobei $-F_{zp}$ die Kraft ist, welche der Zentrifugalkraft entgegenwirkt und diese ausbalanciert. Die letztere trägt nicht zu $\vec{e}_r \times \vec{F}$ bei, und die Gewichtskraft gibt keinen Beitrag zum Drehmoment in z-Richtung: es gilt $\dot{\vec{L}} = -mgR\vec{e}_\varphi$, und da $\vec{e}_\varphi \vec{e}_z = 0$ folgt $\dot{L}_z = 0$.]
Damit ergibt sich:

$$L = mv_{\varphi_0} R \sin\vartheta_0 = mv_\varphi R \sin\vartheta$$

$$\boxed{v_\varphi = \frac{L}{mR\sin\vartheta} = \frac{v_{\varphi_0}\sin\vartheta_0}{\sin\vartheta}} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

[Genauere Herleitung von L_z (war nicht gefordert):

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mR\vec{e}_r \times (v_\vartheta \vec{e}_\vartheta + v_\varphi \vec{e}_\varphi) = mR(v_\vartheta \vec{e}_\varphi - v_\varphi \vec{e}_\vartheta)$$

und mit $\vec{e}_\varphi \vec{e}_z = 0$, $\vec{e}_\vartheta \vec{e}_z = -\sin\theta$ ergibt sich $L_z = mRv_\varphi \sin\vartheta$.]

b.)

Die gesamte Energie ergibt sich wieder aus kinetischer und potentieller Energie:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\varphi_0}^2 - mgR\cos\vartheta_0 = \boxed{\frac{1}{2}m\left(v_\varphi^2 + v_\vartheta^2\right) - mgR\cos\vartheta} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Wir lösen das ganze nach v_ϑ auf:

$$v_\vartheta = \pm\left[v_{\varphi_0}^2 - v_\varphi^2 + 2gR\left(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Nun ersetzen wir noch v_φ durch die Beziehung aus Teilaufgabe a.):

$$\boxed{v_\vartheta = \pm\left[v_{\varphi_0}^2\left(1 - \frac{\sin^2\vartheta_0}{\sin^2\vartheta}\right) + 2gR\left(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

c.)

Die Extremwerte der Winkel ergeben sich aus der Bedingung $v_\vartheta = 0$.

$$v_{\varphi_0}^2\left(\sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta_0\right) + 2gR\left(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0\right)\sin^2\vartheta = 0$$

$$\boxed{\sin^2\vartheta\left[v_{\varphi_0}^2 + 2gR\left(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0\right)\right] = v_{\varphi_0}^2 \sin^2\vartheta_0} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Die Gleichung wird erfüllt durch $\vartheta_1 = \vartheta_0$. Dies ist der minimale Winkel für ϑ, da die Anfangsbedingung sofort zu einem Anstieg in ϑ führt. (Es gibt noch eine zweite Lösung θ_2, die das Maximum für ϑ darstellt.)