Nachklausur zur Vorlesung **Theoretische Physik A**
Universität Karlsruhe **WS 2004/05**

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

Dauer: 2 Stunden
Gesamtpunktzahl: 30 Punkte + 5 Zusatzpunkte
Hinweise: Beginnen Sie bitte jede Klausuraufgabe auf einem neuen Blatt. **Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.** Geben Sie bitte auf dem ersten Blatt Ihre Übungsgruppe an. Als Hilfsmittel sind zwei handbeschriebenes A4-Blätter zugelassen. Die Ausgabe der Klausuren sowie der Scheine erfolgt ab 26.04.05 im Sekretariat des Instituts für Theoretische Festkörperphysik im 11. Stock des Physikhochhauses.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Reihenentwicklung:
Leiten Sie eine Reihenentwicklung für die Funktion $g(x)$ =Arctan(x) her, wobei diese Funktion die Relation

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad g(0) = 0 \tag{1}$$

erfüllt. Benutzen Sie dabei, dass $\frac{1}{1+x^2}$ als geometrische Reihe darstellbar ist, und bestimmen Sie die Reihenkoeffizenten.

Aufgabe 2 (10 Punkte+5 Zusatzpunkte)

Bewegung in einem Medium mit Reibungskraft:
Das Sinken eines Steins in Wasser kann durch die Gleichungen

$$F = m\frac{dv}{dt} = F_0 - cv \quad \text{bzw.} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{v_e - v}{\tau}\ , \quad \text{mit} \quad v_e = \frac{F_0}{c}\ , \quad \tau = \frac{m}{c}\ , \tag{2}$$

beschrieben werden. Hierbei beschreibt $F_0 < 0$ die Differenz zwischen Schwerkraft und Auftrieb und $-cv$ die Wasserwiderstandskraft. Ferner wählen wir den Koordinatenursprung an der Wasseroberfläche, und $v < 0$ für eine abwärtsgerichtete Geschwindigkeit. Der Stein fällt zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = v_0 < 0$ ins Wasser.

a) Zeigen Sie, dass v_e die Endgeschwindigkeit ist. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie $v(t)$ als Funktion von t. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie $x(t)$ als Funktion von t. (1 Punkt)

d) Was ist das asymptotische Verhalten von $x(t)$ in den Bereichen $t \to 0$ und $t \to \infty$? (Hinweis: $e^{-a} \sim 1 - a$ für $a \ll 1$, und $e^{-a} \sim 0$ für $a \gg 1$). (2 Punkte)

e) Skizzieren Sie die Funktionen $v(t)$ und $x(t)$ für festes $v_e < 0$ und die folgenden drei verschiedene Werte für v_0: (i) $v_{01} = v_e$, (ii) $v_{02} = 0$ und (iii) $v_{03} = 2v_e$. (2 Punkte)

f) Ein Apfel ist leichter als Wasser, und deshalb gilt wenn einen Apfel ins Wasser fällt $F_0 > 0$ (das heißt $v_e > 0$). Nach einer Zeit t_m erreicht der Apfel den tiefsten Punkt x_m im Wasser, und nach einer Zeit t_f erreicht der Apfel wieder die Wasseroberfläche. Skizzieren Sie $v(t)$ und $x(t)$ für den Fall $v_0 = -v_e$, und deuten Sie auf beiden Skizzen an, wo t_f und t_m liegen. (2 Punkte)

g) Zusatzaufgabe: Berechnen Sie t_m und x_m. Drücken Sie die Geschwindigkeit des Apfels bei $t = t_f$ durch t_f aus (vereinfachen sie den Ausdruck indem Sie die Bedingung $x(t_f) = 0$ in $v(t = t_f)$ einsetzen), und zeigen Sie, dass die Ungleichung $\tau(1 + \frac{|v_0|}{v_e}) \geq t_f \geq \tau\frac{|v_0|}{v_e}$ gilt. (5 Zusatzpunkte)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Freier Fall im Schwerefeld:

Ein Meteor fällt aus dem Weltall radial zur Erde. Sein Abstand zum Erdmittelpunkt sei $r(t)$, und seine Gesamtenergie sei $E = 0$.

a) Geben Sie die Bewegungsgleichung für $r(t)$ an und leiten Sie aus dieser (durch Multiplikation mit $\dot{r}$) den Energieerhaltungssatz her. (2 Punkte)

b) Finden Sie hieraus $\dot{r}$ als Funktion von r, und bestimmen Sie (durch Separation der Variablen) die Funktion $r(t)$, für $r > R =$ Erdradius und Anfangsbedingung $r(0) = r_0$. (2 Punkte)

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Schacht durch die Erde:

Nehmen Sie an, es bestünde ein senkrechter Schacht, der durch den Erdmittelpunkt bis an die gegenüberliegende Seite der Erde (Masse M, Radius R) führt. Im Abstand r vom Erdmittelpunkt wirke auf einen Stein der Masse m im Schacht eine Kraft $F(r) = -\frac{GmM(r)}{r^2}$, wobei $M(r)$ die Masse "unterhalb von r" sei, d.h. die Masse einer Kugel mit konstanter Dichte und Radius r.

a) Vernachlässigen Sie zunächst den Luftwiderstand. Zeigen Sie, dass ein Stein, der mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ in den Schacht fällt, harmonische Oszillationen durchführt, und finden Sie die Frequenz ω_0. Geben Sie mittels Formel und Skizze (Herleitung wird nicht verlangt) die Funktion $r(t)$ an. (3 Punkte)

b) Berücksichtigen Sie nun den Luftwiderstand mit einer Reibungskraft der Form $-2m\gamma v$, wobei γ unabhängig von r ist. Es gilt $\gamma \gg \omega_0$. Wie weit fällt der Stein? Geben Sie die Lösung $r(t)$ explizit für die Anfangsbedingungen $r(0) = R$, $\dot{r}(0) = 0$ an. (3 Punkte)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Greenfunktionen:

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right) \varphi(x) = \rho(x) \ , \tag{3}$$

die für eine vorgegebene Funktion $\rho(x)$ das Verhalten der Funktion $\varphi(x)$ bestimmt.

a) Die Greensche Funktion $G(x)$ der Differentialgleichung erfüllt (3) mit $\rho(x) = \delta(x)$. Bestimmen Sie die Konstanten B und b in folgendem Ansatz für $G(x)$:

$$G(x) = Be^{-b|x|} = B\left[\theta(-x)\, e^{bx} + \theta(x)\, e^{-bx}\right] \ . \tag{4}$$

wobei $\theta(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $\theta(x) = 0$ für $x < 0$ ist. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie nun mit Hilfe von $G(x)$ die Funktion $\varphi(x)$ in dem Bereich $x > a$ für den Fall $\rho(x) = \rho_0\, \theta(x + a)\, \theta(a - x)$. (2 Punkte)