Lösungsvorschlag zur Nachklausur Theoretische Physik A: Klassische Mechanik

Prof. Dr. Schön und Dr. Eschrig

Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Wir suchen die Reihenentwicklung der Funktion $g(x) = \arctan(x)$. Dazu gehen wir aus von:

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Durch Differentiation nach x ergibt sich:

$$g`(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Die Ableitung von $g(x) = \arctan(x)$ ist $g`(x) = \frac{1}{1+x^2}$, was sich mittels der geometrischen Reihe auch schreiben lässt als:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir dann:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{1}{3},\ a_4 = 0,\ a_5 = \frac{1}{5},\ \ldots$$

Allgemein gilt damit $(2n+1)a_{2n+1} = (-1)^n$ und damit:

$$\boxed{a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}(-1)^n \text{ und } a_{2n} = 0}$$

$$\boxed{g(x) = \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Aufgabe 2 **10 Punkte + 5 Zusatzpunkte**

a.)

Für die Kraft auf das Teilchen gilt laut Aufgabenstellung:

$$F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_0 - cv \text{ mit } F_0 < 0$$

Hat das Teilchen die Endgeschwindigkeit erreicht, so bewegt es sich kräftefrei, sonst würde sich die Geschwindigkeit ja weiterhin ändern. Mit $F = 0$ erhalten wir also $v_e = \frac{F_0}{c}$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

b.)

Die Funktion $v(t)$ erhalten wir durch Lösen der angegebenen Differentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}(F_0 - cv) = \frac{v_e - v}{\tau} \text{ mit } \tau = \frac{m}{c}$$

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v' \, \frac{1}{v_e - v'} = \frac{1}{\tau} \int_0^t \mathrm{d}t' = \frac{t}{\tau}$$ 1 Punkt

$$-\ln\left(\frac{v_e - v}{v_e - v_0}\right) = \frac{t}{\tau} \Rightarrow \boxed{v(t) = v_e + (v_0 - v_e) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$ 1 Punkt

c.)

Durch Integration von $v(t)$ ergibt sich sofort $x(t)$:

$$\boxed{x(t) = \int_0^t v(t') \, \mathrm{d}t' = v_e t - \tau(v_0 - v_e) \cdot \left[\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1\right]}$$ 1 Punkt

d.)

Wir betrachten nun die Grenzfälle von $x(t)$ für $t \mapsto 0$ und $t \mapsto \infty$:

- $t \mapsto 0$:

  Hier können wir die Exponentialfunktion entwickeln und erhalten:

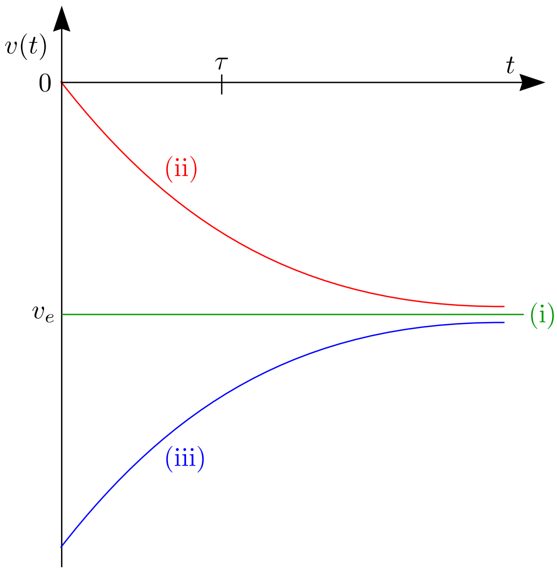
  $$x(t) = v_e t - \tau(v_0 - v_e) \cdot \left(1 - \frac{t}{\tau} + O\left(\frac{t^2}{\tau^2}\right) - 1\right) \approx v_e t + \tau(v_0 - v_e) \cdot \frac{t}{\tau} = \boxed{v_0 t}$$ 1 Punkt

- $t \mapsto \infty$:

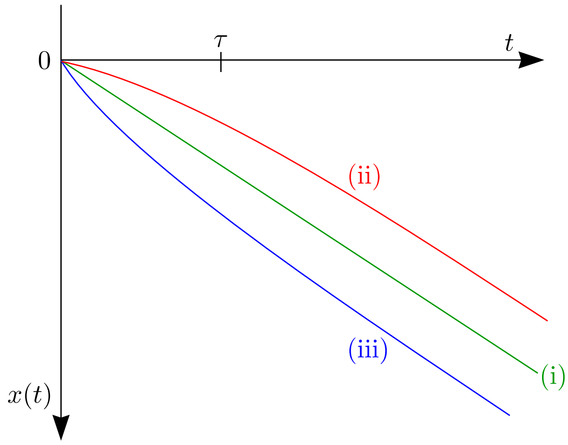
  Für große Werte von t geht die Exponentialfunktion mit dem negativen Exponenten gegen Null:

  $$x(t) \approx v_e t - \tau(v_0 - v_e) \cdot (-1) = \boxed{v_e t + \tau(v_0 - v_e)}$$ 1 Punkt

e.)



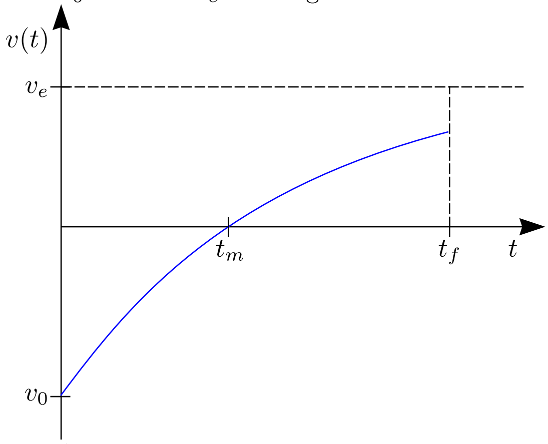
1 Punkt



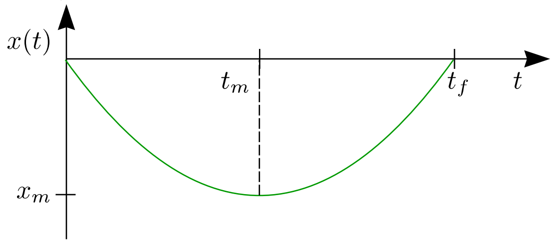
1 Punkt

f.)

Mit $F_0 > 0$ und $v_e > 0$ folgt:



1 Punkt



1 Punkt

g.) **5 Zusatzpunkte**

Wir berechnen nun noch t_m und x_m. Am Umkehrpunkt muss natürlich die Geschwindigkeit verschwinden, also $v(t_m) = 0$ gelten. Hieraus ergibt sich: 1 Punkt

$$v_e = (v_e - v_0) \cdot \exp\left(-\frac{t_m}{\tau}\right)$$

t_m erhalten wir durch Logarithmieren:

$$\boxed{t_m = \tau \ln\left(1 - \frac{v_0}{v_e}\right) = \tau \ln\left(1 + \frac{|v_0|}{v_e}\right)}$$

1 Punkt

x_m ergibt sich durch Einsetzen von t_m in $x(t)$:

$$x_m = v_e t_m + \tau v_e + \tau(v_0 - v_e) = \tau \cdot \left[v_0 + v_e \cdot \ln\left(1 + \frac{|v_0|}{v_e}\right)\right]$$

$$\boxed{x_m = \tau\left[v_e \cdot \ln\left(1 + \frac{|v_0|}{v_e}\right) - |v_0|\right]}$$

1 Punkt

Des weiteren berechnen wir t_f aus der Bedingung $x(t_f) = 0$:

$$v_e t_f = \tau(v_0 - v_e) \cdot \left[\exp\left(-\frac{t_f}{\tau}\right) - 1\right]$$

$$(v_0 - v_e) \cdot \exp\left(-\frac{t_f}{\tau}\right) = \frac{v_e t_f}{\tau} + (v_0 - v_e) \Rightarrow v(t_f) = v_e + \frac{v_e t_f}{\tau} + v_0 - v_e$$

Damit erhalten wir schließlich:

$$\boxed{v(t_f) = v_0 + v_e \cdot \frac{t_f}{\tau} = v_e \cdot \frac{t_f}{\tau} - |v_0|}$$ 1 Punkt

Da $v(t) = v_e - (|v_0| + v_e) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \leq v_e$ für alle t und $v(t_f) \geq 0$ (da $t_f > t_m$ und $v(t_m) = 0$), folgt $v_e > v(t_f) = v_0 + v_e \cdot \frac{t_f}{\tau} \geq 0$. 1 Punkt

$$\boxed{\tau \cdot \frac{v_e + |v_0|}{v_e} \geq t_f \geq \frac{|v_0|}{v_e}\tau}$$

Aufgabe 3 — 4 Punkte

a.)

Die Bewegungsgleichung des Meteoriten im Schwerefeld der Erde lautet:

$$m\ddot{r} = -G\frac{Mm}{r^2}$$ 1 Punkt

Daraus erhalten wir durch Integration den Energieerhaltungssatz für dieses spezielle Problem. Da es sich um eine Differentialgleichung handelt, in der nur die zweite Ableitung $\ddot{r}(t)$ und die Funktion $r(t)$ selbst auftauchen, kann diese Integration folgendermaßen bewerkstelligt werden. Wir mulitplizieren zuerst beide Seiten der Gleichung mit $\dot{r}$:

$$m\ddot{r} \cdot \dot{r} = -G\frac{Mm}{r^2} \cdot \dot{r}$$

Nun kann die Integration nach der Zeit t ausgeführt werden, wobei die Gesamtenergie E (Integrationskonstante!) laut Aufgabenstellung gleich Null gesetzt wird:

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 = G\frac{Mm}{r}$$ 1 Punkt

b.)

Wir lösen obige Gleichung nach $\dot{r}$ auf und erhalten:

$$\dot{r} = -\sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Durch Trennung der Veränderlichen und anschließende Integration ist es möglich, diese Differentialgleichung erster Ordnung zu lösen:

$$\int_{r_0}^{r} \mathrm{d}r' \sqrt{r'} = -\sqrt{2GM} \int_0^t \mathrm{d}t'$$ 1 Punkt

$$\frac{2}{3}\left(r^{\frac{3}{2}} - r_0^{\frac{3}{2}}\right) = -\sqrt{2GM}t \Rightarrow \boxed{r(t) = \left(r_0^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2GM}t\right)^{\frac{2}{3}}}$$ 1 Punkt

Aufgabe 4

6 Punkte

a.)

Wenn r der Ort des Teilchens ist, hängt die Kraft nur von der Masse ab, die sich innerhalb der Kugel mit dem Radius r befindet. Diese Masse können wir folgendermaßen ausrechen:

$$M(r) = \varrho \cdot V(r) = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = M \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

1 Punkt

Damit ergibt sich also folgende Kraft:

$$F(r) = -G\frac{mM(r)}{r^2} = -\frac{GmM}{R^3}r$$

So folgt die Bewegungsgleichung:

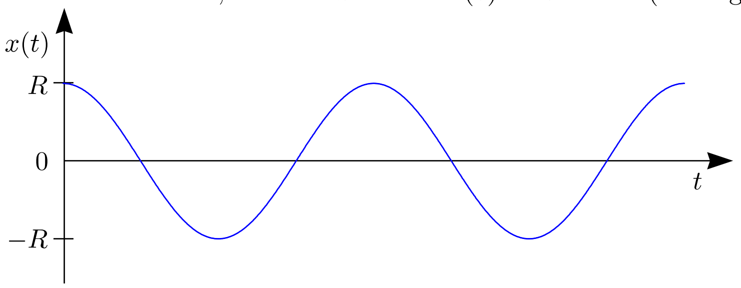
$$\boxed{m\ddot{x} + \frac{GM}{R^3}mx = 0}$$

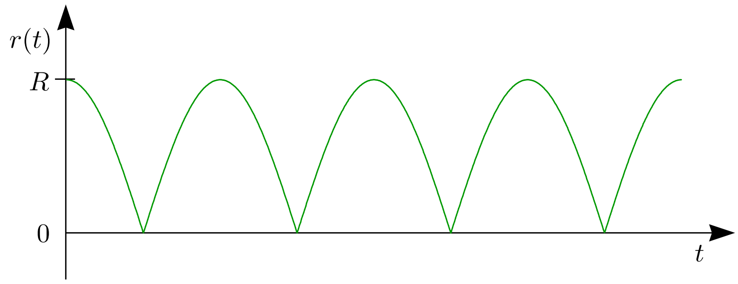
Diese Gleichung ist von der Form der Differentialgleichung des harmonischen Oszillators. Vergleichen wir die allgemeine Oszillatorgleichung $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$ mit der obigen, so ergibt sich die Resonanzfrequenz und damit $x(t)$:

$$\boxed{x(t) = R\cos(\omega_0 t) \text{ mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}}$$

2 Punkte

Dabei wurde beachtet, dass der Stein bei $x(0) = R$ startet (Anfangsbedingung!).





b.)

Wir gehen hier aus von der Differentialgleichung des harmonischen Oszillators mit Dämpfung (Kriechfall), da nach Aufgabenstellung $\gamma \gg \omega_0$ ist:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ mit } \gamma \gg \omega_0$$

1 Punkt

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\boxed{\begin{gathered} x(t) = \exp(-\gamma t)(C_1 \exp(\Omega t) + C_2 \exp(-\Omega t)) \text{ mit } \Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \text{ und} \\ C_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\Omega}\right),\ C_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0 + \gamma x_0}{\Omega}\right) \end{gathered}}$$

1 Punkt

Aus $v_0 = 0$ und $x_0 = R$ ergibt sich:

$$C_1 = \frac{x_0}{2}\left(1+\frac{\gamma}{\Omega}\right) \text{ und } C_2 = \frac{x_0}{2}\left(1-\frac{\gamma}{\Omega}\right) \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

$$x(t) = \exp(-\gamma t)x_0 \cdot \left[\cosh(\Omega t) + \frac{\gamma}{\Omega}\sinh(\Omega t)\right]$$

Es gilt außerdem $\lim\limits_{t\mapsto\infty} x(t) = 0$; der Stein fällt also bis zum Erdmittelpunkt.

Aufgabe 5 $\boxed{\textbf{6 Punkte}}$

a.)

Die GREENsche Funktion für die Differentialgleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \lambda^2\right)\varphi(x) = \delta(x)$$

lautet wie folgt:

$$G(x) = B\exp(-b|x|) = B\left[\vartheta(-x)\exp(bx) + \vartheta(x)\exp(-bx)\right]$$

Es sind jetzt noch die Konstanten B und b zu bestimmen. Dazu differenzieren wir $G(x)$ einmal nach x, wobei wir beachten, dass die Ableitung der HEAVISIDE-Funktion $\theta(x)$ die δ-Funktion $\delta(x)$ ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x) = B\left[-\delta(x)\cdot[\exp(bx) - \exp(-bx)] + b\cdot(\vartheta(-x)\exp(bx) - \vartheta(x)\exp(-bx))\right] \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Wir nutzen aus, dass $\delta(x-x_0)f(x) = \delta(x-x_0)f(x_0)$ ist, wodurch der erste Summand verschwindet:

$$\delta(x)\cdot[\exp(bx) - \exp(-bx)] = \delta(x)\cdot[\exp(0) - \exp(-0)] = 0$$

Durch nochmaliges Ableiten nach x ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}G(x) &= Bb\left(-\delta(x)\cdot(\exp(bx)+\exp(-bx)) + b\left[\vartheta(-x)\exp(bx) + \vartheta(x)\exp(-bx)\right]\right) = \\ &= -2Bb\delta(x) + b^2G(x)\end{aligned} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Aus

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \lambda^2\right)G(x) = \delta(x)$$

ergibt sich $-2Bb\delta(x) + (b^2-\lambda^2)G(x) = \delta(x)$ und durch Koeffizientenvergleich folgt:

$$\boxed{b = \lambda \text{ und } B = -\frac{1}{2\lambda} \text{ und } G(x) = -\frac{\exp(-\lambda|x|)}{2\lambda}} \qquad \boxed{\text{2 Punkte}}$$

b.)

Da wir jetzt die GREENsche Funktion für diese spezielle Differentialgleichung mit $\varrho(x) = \delta(x)$ haben, können wir die inhomogene Lösung für $\varrho(x) = \varrho_0\theta(x+a)\theta(a-x)$ berechnen durch das bekannte Faltungsintegral:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\,G(x-x')\varrho(x') = -\frac{\varrho_0}{2\lambda}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\,\exp(-(x-x')\lambda) = -\frac{\varrho_0}{2\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda}\exp(-(x-x')\lambda)\Big|_{-a}^{a} = \\ &= \boxed{-\frac{\varrho_0}{2\lambda^2}\exp(-x)\cdot[\exp(\lambda a) - \exp(-\lambda a)]} = \boxed{-\frac{\varrho_0}{\lambda^2}\exp(-x)\sinh(\lambda a)}\end{aligned} \qquad \boxed{\text{2 Punkte}}$$