Theoretische Physik A

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila **WS 07/08**

1. Klausur: 11.02.2008 Bearbeitungsdauer: 2 Stunden

Name: Note

Matrikelnummer: Gruppe:

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe:	1	2	3	4	$\sum$

Aufgabe 1 (5 Punkte)

(a) Gegeben seien die zwei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Berechnen Sie } \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

(b) Gegeben sei die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}(x) = x^3 y$. Bestimmen Sie die Funktion $y(x)$.

(c) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Ein Massenpunkt bewegt sich auf der folgenden Bahnkurve:

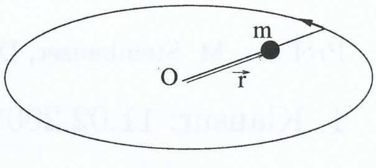
$$\vec{r}(t)^T = (R(\omega t - \sin \omega t),\, R(1 - \cos \omega t),\, 0)\,, \text{ mit } R \text{ und } \omega \text{ konstant}.$$

(i) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Massenpunktes.
(ii) Bestimmen Sie den auf 1 normierten Tangentenvektor als Funktion von t.
(iii) Skizzieren Sie die Bahnkurve des Massenpunktes.
(iv) Geben Sie die Bahnkurve in einem um den Winkel θ gegen den Uhrzeigersinn gedrehten Bezugssystem an. Dabei soll um die z-Achse gedreht werden.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Eine Perle der Masse m kann reibungslos auf einer dünnen Stange gleiten, welche in der xy-Ebene mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung der Perle auf und lösen Sie diese für die Anfangsbedingungen: Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Perle im Ruhe bezüglich der Stange im Abstand r_0 vom Punkt O.
(b) Welche Kraft wird von der Stange auf die Perle ausgeübt?
(c) Welche Bogenlänge s legt die Perle zwischen $t_0 = 0$ und t zurück ? (i) auf der Stange? (ii) im Inertialsystem ?
Im Fall (ii) müssen Sie das auftretenden Integral nicht explizit lösen.



Aufgabe 3 (4 Punkte)

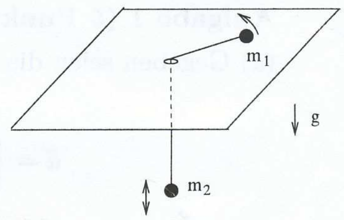
Betrachten Sie die Bewegung eines Teilchen der Masse m im Potential $U(r) = -k/r$. Gegeben sei folgender Vektor

$$\vec{A} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{mk} - \frac{\vec{r}}{r},$$

wobei $\vec{p}$ der Impuls und $\vec{L}$ der Drehimpuls ist.
Ist $\vec{A}$ eine Erhaltungsgröße? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine explizite Rechnung.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zwei Massenpunkte der Masse $m_1 = m$ und $m_2 = 2m$ seien mit einer Schnur der Länge l miteinander verbunden (vgl. Skizze). Einer der Massenpunkte gleitet reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene, der andere kann unter dem Einfluß der Schwerekraft eine vertikale Bewegung ausführen. Benutzen Sie zur Beschreibung des Systems ebene Polarkoordinaten (r, ϕ), wobei der Ursprung auf dem Loch sitzt, durch das die Schnur verläuft.



(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems auf. Welche Bewegungsgleichung können Sie sofort integrieren? Welcher Erhaltungssatz steckt dahinter?
(b) Zeigen Sie, dass sich der obere Massenpunkt auf Kreisbahnen bewegen kann. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit des oberen Massenpunktes in Abhängigkeit vom Kreisradius.
(c) Zeigen Sie, dass die Bewegung des oberen Massenpunktes auf einer Kreisbahn stabil verläuft. Benutzen Sie dazu den Ansatz $r(t) = r_0 + \rho(t)$, wobei $\rho(t)$ eine kleine Störung der Kreisbahn mit Radius $r(t) = r_0$ darstellt ($\rho(t) \ll r_0$). Entwickeln Sie nun die Bewegungsgleichung für $r(t)$ für kleine $\rho(t)$ und zeigen Sie, dass die Störung zu harmonischen Schwingungen um die Kreisbahn führt. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer des Systems als Funktion von Kreisradius und Erdbeschleunigung.

Hilfsformeln:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$$
$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{f}(\vec{r}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{f}(\vec{r}) - \triangle\,\vec{f}(\vec{r})$$
$$\mathrm{div}\,(\phi(\vec{r})\,\vec{f}(\vec{r})) = \vec{f}(\vec{r}) \cdot \mathrm{grad}\,\phi(\vec{r}) + \phi(\vec{r})\,\mathrm{div}\,\vec{f}(\vec{r})$$
$$\delta(f(x)) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|} \quad \text{mit} \quad f'(x_n) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_n}$$