Klausur TheoA WS07/08

Aufgabe 1

a)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \\
&= 2 + \frac{3}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) &= x^3 y \\
\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y &= \int x^3 \mathrm{d}x \\
\ln y &= \frac{1}{4}x^4 \\
y(x) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{4}x^4}
\end{aligned}$$

c)

$$\det A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \cdot 2\sqrt{2} = 1$$

d)

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R(\omega t - \sin \omega t) \\ R(1 - \cos \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

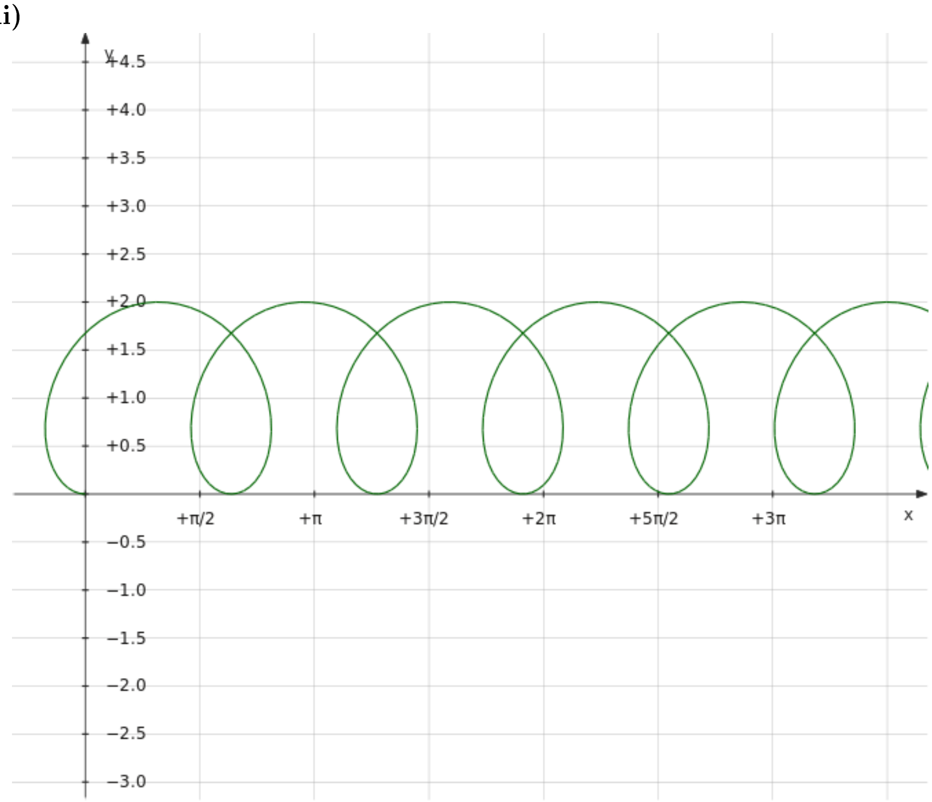
i)

$$\begin{aligned}
v(t) &= \dot{\vec{r}}(t) = \omega R \begin{pmatrix} 1 - \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\
a(t) &= \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \omega^2 R \sin \omega t \\ \omega^2 R \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ii)

$$
\begin{aligned}
\hat{r}_T\,(t) &= \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1-\cos\omega t)^2+\sin^2\omega t}}\begin{pmatrix} 1-\cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2\cos\omega t+\cos^2\omega t+\sin^2\omega t}}\begin{pmatrix} 1-\cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2-2\cos\omega t}}\begin{pmatrix} 1-\cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

iii)



Mit Höhe der "Kreise" von 2R und Periodiztät von $2\pi\omega$.

iv) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \omega R \begin{pmatrix} 1-\cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \omega R \begin{pmatrix} \cos\theta\cdot(1-\cos\omega t)+\sin\theta\cdot\sin\omega t \\ -\sin\theta\cdot(1-\cos\omega t)+\cos\theta\cdot\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Hier soll man zeigen, dass sich die Größe $\vec{A}$ sich nicht über die Zeit ändert, wenn sich ein Teilchen frei durch das Potential bewegt.

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{\vec{p}\times\vec{L}}{mk} - \frac{\vec{r}}{r} \\
\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{mk}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\times\vec{L} + \vec{p}\times\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{r\dot{\vec{r}} - \dot{r}\vec{r}}{r^2}
\end{aligned}$$

Zuerst sollen noch die verbleibenden Ableitungen bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} &= \vec{F} = -\operatorname{grad} U(r) = -\operatorname{grad}\left(-\frac{k}{r}\right) = \frac{k}{r^2}\hat{r} = \frac{k}{r^3}\vec{r} \\
\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\times\vec{p}\right) \\
&= \dot{\vec{r}}\times\vec{p} + \vec{r}\times\dot{\vec{p}} \\
&= \underbrace{\dot{\vec{r}}\times m\dot{\vec{r}}}_{=0} + \vec{r}\times m\ddot{\vec{r}} \\
&= \vec{r}\times\frac{k}{r^3}\vec{r} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Es folgt das nicht verschwindende Kreuzprodukt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\times\vec{L} &= -\frac{k}{r^3}\vec{r}\times\left(\vec{r}\times\vec{p}\right) \\
&= -\frac{k}{r^3}\left(\vec{r}\left(\vec{r}\cdot\vec{p}\right) - \vec{p}\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right)\right) \\
&= -\frac{k}{r^3}\vec{r}\left(\vec{r}\cdot m\dot{\vec{r}}\right) + \frac{k}{r^3}m\dot{\vec{r}}\cdot r^2 \\
&= -\frac{mk}{r^3}\vec{r}\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}\right) + \frac{mk}{r}\dot{\vec{r}} \\
&= mk\left(-\frac{\vec{r}\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\vec{r}}}{r}\right)
\end{aligned}$$

Das Skalarprodukt aus $\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}$ lässt durch Umformen mit der Kettenregel vereinfachen

$$\vec{r}\dot{\vec{r}} = \frac{2\vec{r}\dot{\vec{r}}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}^2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t} = \frac{2r\dot{r}}{2} = r\dot{r}$$

Es gilt also für das Kreuzprodukt

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \times \vec{L} \quad = \quad mk\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}\cdot\dot{r}}{r^2}\right)$$

Einsetzen in Ausgangsgleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{mk}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \times \vec{L} + \vec{p} \times \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{r\dot{\vec{r}} - \dot{r}\vec{r}}{r^2} \\
&= \frac{1}{mk}\left(mk\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2}\right) + 0\right) - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2} \\
&= \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2} - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Erhaltungsgröße