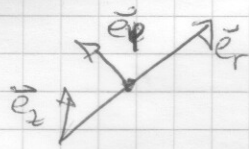


Theo A Klausur

Aufgabe 3 Perle

a)



$$r \sim \vec{e}_r$$

$$\vec{r}_S = r(t) \cdot \vec{e}_r + 0 \cdot \vec{e}_\phi + 0 \cdot \vec{e}_z$$

$$\dot{\vec{r}}_S = \dot{r} \vec{e}_r \quad \ddot{\vec{r}}_S = \ddot{r} \vec{e}_r$$

$$\vec{F} = m \ddot{\vec{r}}_S = m \cdot \ddot{r} \vec{e}_r = \vec{F}_S + \vec{F}_C + \vec{F}_Z$$

$$\vec{F}_Z = -m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_S) = -m \omega^2 r (\underbrace{\vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \vec{e}_r)}_{\substack{\vec{e}_\phi \\ -\vec{e}_r}})$$

$$\Rightarrow \vec{F}_Z = m \omega^2 r \vec{e}_r$$

$$\vec{F}_C = -2m \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_S = -2m \omega \dot{r} (\vec{e}_z \times \vec{e}_r) = -2m \omega \dot{r} \vec{e}_\phi$$

$$\vec{F}_{St} = \vec{F}_{St,r} \vec{e}_r + \vec{F}_{St,\phi} \vec{e}_\phi + \vec{F}_{St,z} \vec{e}_z$$

$$\vec{F}_{St,r} \equiv 0, \text{ da reibungslos}$$

$$\vec{F}_{St,z} \equiv 0, \text{ da keine Gravitation}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{St} = \vec{F}_{St,\phi} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{r} \vec{e}_r = \vec{F}_{St,\phi} \cdot \vec{e}_\phi - 2m \omega \dot{r} \vec{e}_\phi + m \omega^2 r \vec{e}_r$$

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$$

$$\vec{F}_{St,\phi} = 2m \omega \dot{r}$$

$$\vec{r}(t)_S = r(t) \vec{e}_r$$

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$$

$$\text{Ansatz: } r = \tilde{c} \cdot e^{\lambda t}$$

$$c \lambda^2 - \omega^2 c = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm \omega \Rightarrow r(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$$

Anfangsbedingungen

$$r(0) = c_1 + c_2 = 0 \rightarrow c_1 = -c_2$$

$$\dot{r}(0) = \omega c_1 - \omega c_2 = v_0 \rightarrow c_1 = \frac{v_0}{2\omega} = -c_2$$

$$\Rightarrow r(t) = \frac{v_0}{2\omega} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) = \frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t)$$

$$b) \vec{F}_{st} = F_{st,\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow F_{st,\varphi} = 2m\omega \dot{r}, \quad \dot{r} = v_0 \cosh(\omega t)$$

$$\rightarrow F_{st,\varphi} = 2m\omega v_0 \cosh(\omega t)$$

$$c) i) S_s(t) = \int_0^t |\vec{v}_s| d\tau = \int_0^t \dot{r} d\tau = \int_0^t v_0 \cosh(\omega \tau) d\tau = \frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t)$$

$$(ii) \vec{r}_I = C_2^{-1} \vec{r}_s$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot r(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e}_r \text{ im Stangensystem}$$

$$= r(t) \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \sin(\omega t + \varphi_0) \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e}_r \text{ im IS}$$

$$\vec{v}_I = \dot{\vec{r}}_I = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \sin(\omega t + \varphi_0) \\ 0 \end{pmatrix} + r\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t + \varphi_0) \\ \cos(\omega t + \varphi_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow |\vec{v}_I| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \omega^2}$$

$$\Rightarrow S_I = \int_0^t \sqrt{v_0^2 \cosh^2(\omega \tau) + v_0^2 \sinh^2(\omega \tau)} d\tau$$

Aufgabe 4

(anderes Aufgabenblatt)

$$\vec{A} = \frac{\vec{r} \times \vec{L}}{mr} - \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{mr} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{L} + \vec{r} \times \frac{d\vec{L}}{dt} \right) - \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot \dot{r} \right)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = -\text{grad } U(r) = -\frac{k}{r^3} \vec{r}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = (\dot{\vec{r}} \times \vec{p}) + (\vec{r} \times \dot{\vec{p}}) = \underbrace{(\dot{\vec{r}} \times m \dot{\vec{r}})}_{=0} + \underbrace{(\vec{r} \times \frac{k}{r^3} \vec{r})}_{=0}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} \times \vec{L} &= -\frac{k}{r^3} (\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{p})) = (\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}(\vec{r} \cdot \vec{r})) \frac{k}{r^3} = k \frac{\vec{r}}{r^3} (\vec{r} \cdot m \dot{\vec{r}}) + k m \frac{\dot{\vec{r}}}{r^3} \vec{r} \\ &= m k \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \dot{r} + \frac{\dot{\vec{r}}}{r} \right) \end{aligned}$$

$$\text{da } \frac{d}{dt} (\vec{r})^2 = \frac{d}{dt} r^2 \Leftrightarrow 2 \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = 2 \dot{r} r \Rightarrow \dot{r} = \frac{\dot{r}}{r} \vec{r}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \left[-\frac{\dot{r}}{r} \vec{r} + \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}}{r} + \frac{\dot{r}}{r} \right] = 0 \Rightarrow A \text{ ist erhalten}$$

$$Q = -mk \vec{A} \Rightarrow Q \text{ ist erhalten (Rechnung analog)}$$

Aufgabe 1

a) siehe Klausur

$$b) \frac{dy}{dx} = xy^2 \rightarrow \frac{1}{y^2} dy = x dx \Leftrightarrow y(x) = \frac{-1}{(\frac{x^2}{2} + D)}$$

c) siehe Klausur

d) .