Universität Karlsruhe (TH) **WS 2008/09**

Klassische Theoretische Physik I

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Prüfung Nr. 1 — Lösungsvorschläge

Aufgabe 1: Senkrechtkomponente [8]

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 3)$ und $\vec{b} = (3, 1, 2)$. Berechnen Sie die Komponente $\vec{a}_\perp$ von $\vec{a}$, die auf $\vec{b}$ senkrecht steht.

Lösung: $\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp$, $\vec{a}_\parallel$ bekommen wir durch Projektion auf $\vec{b}$, $\vec{a}_\parallel = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$. Damit ist

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel = \vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}^2}\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}}{9+1+4}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{11}{14}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-19\\17\\20\end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2: ϵ–Tensor [6]

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (4, 1, 1)$ und $\vec{b} = (2, 1, 5)$. Die Komponenten c_k des Vektors $\vec{c}$ sind durch

$$c_k = \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk}\left(a_i b_j + a_j b_i\right)$$

gegeben. Berechnen Sie $\vec{c}$.

Lösung: Verschiendende Lösungsmöglichkeiten von sehr verschiedenem Rechenaufwand.

- Beobachten: symmetrischer Tensor $\times$ antisymmetrischer Tensor $= 0$.
- In Kreuzprodukte übersetzen:

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{a} = \vec{a}\times\vec{b} - \vec{a}\times\vec{b} = 0 .$$

- Zahlen einsetzen …

Aufgabe 3: Drehmatrix **[8]**

Handelt es sich bei der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

um eine Drehmatrix? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Falls Drehmatrix, dann A orthogonal und $\det A = +1$. Aber A nicht orthogonal, z.B. weil Skalarprodukt der ersten beiden Zeilen $= 3 \neq 0$ oder der ersten beiden Spalten $= -1 \neq 0$. Für alle Kombinationen kann man auch berechnen

$$AA^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \neq \text{Einheitsmatrix.}$$

A ist also nicht orthogonal und kann damit keine Drehmatrix sein. $\det A = 1$ gilt übrigens.

Aufgabe 4: Bewegung im Zentralpotential **[12]**

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im Zentralpotential

$$V(r) = \epsilon \left(\frac{r}{\rho}\right)^3 .$$

Die Bahn hat den minimalen Radius $r_{\min} = \rho/2$. Das Teilchen hat die Gesamtenergie $E = 17\epsilon/8$.

(a) Welchen Betrag hat der Drehimpuls des Teilchens?

(b) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen am Punkt $(r_{\min}, 0, 0)$. In Zylinderkoordinaten läßt sich die Geschwindigkeit als $\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\phi \hat{\phi}$ schreiben. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Teilchens bei $t = 0$.

Lösung:

(a) Am Umkehrpunkt, also bei $r_{\min}$, steckt keine kinetische Energie in der radialen Bewegung, damit steckt die gesamte Energie im effektiven Potential:

$$E = \epsilon \left(\frac{r_{\min}}{\rho}\right)^3 + \frac{L^2}{2mr_{\min}^2} .$$

Einsetzen von $E = 17\epsilon/8$ und $r_{\min} = \rho/2$ ergibt $L = \rho\sqrt{m\epsilon}$.

(b) Am Umkehrpunkt verläuft die Bewegung senkrecht zu $\vec{r}$, also ist $v_r = 0$. Damit ist die gesamte Geschwindigkeit durch v_ϕ gegeben. Mit $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$ bekommen wir dann v, weil $\vec{r} \perp \vec{v} \perp \vec{L}$, also $L = mr_{\min}v$. Mit L aus (a) also $v = \rho\sqrt{m\epsilon}/(m\rho/2) = 2\sqrt{\epsilon/m}$.

(b.w.)

Aufgabe 5: Kurve **[8]**

Eine Teilchen der Masse m bewegt sich auf der Kurve

$$\vec{r}(t) = \left(vt, at^2, r_0 \cos \omega t\right) \ .$$

Bestimmen Sie den Tangentialvektor $\vec{v}$ und den Drehimpulsvektor $\vec{L}$ zu beliebigen Zeiten t.

Lösung: Differenzieren,

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (v, 2at, -\omega r_0 \sin \omega t) \ ,$$

und Definition des Drehimpulses mit $\vec{p} = m\vec{v}$ verwenden:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \begin{pmatrix} vt \\ at^2 \\ r_0 \cos \omega t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v \\ 2at \\ -\omega r_0 \sin \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_0 at\,(\omega t \sin \omega t + 2 \cos \omega t) \\ r_0 v\,(\cos \omega t + \omega t \sin \omega t) \\ vat^2 \end{pmatrix} \ .$$

Aufgabe 6: Differentialgleichung **[12]**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 2t \ .$$

Lösung: Zunächst Lösung der homogenenen Gleichung,

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 \ .$$

Standardansatz für homogene, lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $x_h(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$, eingesetzt in die homogene DGL gibt das charakteristische Polynom

$$\alpha^2 + 4\alpha + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -2 \pm i \ .$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$x_h(t) = \mathrm{e}^{-2t}\left(A\mathrm{e}^{it} + B\mathrm{e}^{-it}\right) \ , \qquad A, B \in \mathbb{C}$$

(die Linearkombination $A \cos t + B \sin t$ ist mit dem Ausdruck in der Klammer äquivalent). Für die spezielle Lösung machen wir den Ansatz $x_s(t) = Ct + D$, den wir in die inhomogene Gleichung einsetzen und erhalten

$$4C + 5Ct + 5D = 2t \quad \Rightarrow \quad 5Ct = 2t \quad \text{und} \quad 4C + 5D = 0 \ .$$

Aus dem Koeffizientenvergleich bekommen wir also $C = \frac{2}{5}$ und $D = -\frac{8}{25}$ und damit die allgemeine Lösung

$$x(t) = \mathrm{e}^{-2t}\left(A\mathrm{e}^{it} + B\mathrm{e}^{-it}\right) + \frac{2}{5}t - \frac{8}{25}$$

der Differentialgleichung.

(b.w.)

Aufgabe 7: Gradient **[5]**

Berechnen Sie den Gradienten des Feldes

$$\phi(\vec{r}) = 2x^2y^2z + 3yz^3 \ .$$

Lösung: Ausrechnen,

$$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \left(4xy^2z,\ 4x^2yz + 3z^3,\ 2x^2y^2 + 9yz^2\right) \ .$$

Aufgabe 8: Rotation **[5]**

Berechnen Sie die Rotation des Feldes

$$\vec{g}(\vec{r}) = (x+y, x, z) \ .$$

Lösung: Entweder ausrechnen,

$$\vec{\nabla}\times\vec{g} = \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z}, \frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x}, \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y}\right) = (0-0, 0-0, 1-1) = \vec{0}$$

oder sehen, dass $\vec{g}$ ein Gradientenfeld ist:

$$\vec{g} = \vec{\nabla}\left(\frac{x^2}{2} + xy + \frac{z^2}{2}\right) \ ,$$

womit die Rotation verschwindet.

Aufgabe 9: Länge einer Kurve **[12]**

Gegeben ist die durch t parametrisierte Kurve

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}t^3 + 2,\ \frac{1+t^2}{2},\ \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}\right) \ .$$

Wie lautet die Bogenlänge $s(t)$? Wie lang ist die Kurve zwischen $t = 0$ und $t = 2$?

Lösung: Wir benötigen zunächst den Geschwindigkeitsvektor

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\sqrt{2}\,t^2,\ t,\ t^3\right) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|^2 = 2t^4 + t^2 + t^6 = t^2(1 + 2t^2 + t^4) = t^2(1+t^2)^2 = \vec{v}(t)^2 \ .$$

Damit berechnen wir direkt die Länge der Kurve

$$s(t) = \int_0^t |\vec{v}(t')|\,\mathrm{d}t' = \int_0^t t'(1+t'^2)\,\mathrm{d}t' = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^4$$

und damit auch $s(2) - s(0) = 6$.

(b.w.)

Aufgabe 10: Zylinderkoordinaten **[4]**

Wie lautet der Punkt $\vec{x} = (3, -3, 1)$ in Zylinderkoordinaten (Zylinderachse in z–Richtung)?

Lösung: $\vec{x} = (\rho \cos\phi,\ \rho \sin\phi,\ z)$. Der Punkt liegt auf der Winkelhalbierenden des 4. Quadranten mit dem Abstand $\rho = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$, $\phi = -\pi/4$ oder $\phi = 7\pi/4$. $z = 1$ unverändert. Man kann auch berechnen: $\tan\phi = -1 \Rightarrow \phi = -\pi/4$.