Klausur zur Vorlesung Klass. Theor. Phys. I	Wintersemester 2009/2010
Karlsruher Institut für Technologie	
Prof. Dr. G. Schön - Dr. G. Metalidis	http://www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre

Aufgabe 1: Kräfte

Ein Massenpunkt bewege sich in dem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = ay\hat{e}_x + ax\hat{e}_y + b\hat{e}_z$, wobei a, b positive Konstanten sind.

(a) Zeigen Sie, dass es sich um eine konservative Kraft handelt. Ist $\vec{F}$ eine Zentralkraft? (1,5 Punkte)

(b) Wie lautet die potenzielle Energie der Kraft $\vec{F}$? (1 Punkt)

(c) Berechnen Sie die Arbeit, die insgesamt aufzubringen ist, um den Massenpunkt vom Ursprung aus wie folgt zu verschieben: $(0,0,0) \to (a,0,0) \to (a,a,0) \to (0,a,0) \to (0,0,0)$. (0,5 Punkt)

Aufgabe 2: 1-dimensionaler elastischer Stoß

Zwei Massenpunkte mit unterschiedlichen Massen m_1 und m_2 gleiten reibungsfrei mit Anfangsgeschwindigkeiten $v_{1i} > 0$ und $v_{2i} < 0$ im Laborsystem zentral aufeinander zu und prallen elastisch zurück.

(a) Was ist die Geschwindigkeit V_S des Schwerpunktes im Laborsystem? Finden Sie mittels einer Galilei-Transformation die Geschwindigkeiten v'_{1i} und v'_{2i} der Teilchen im Schwerpunktssystem. (2 Punkte)

(b) Nutzen Sie Impuls- und Energieerhaltung im Schwerpunktssytem, um die Geschwindigkeiten v'_{1f} und v'_{2f} der Teilchen nach dem Stoß in Abhängigkeit von v'_{1i} und v'_{2i} zu finden. (2 Punkte)

(c) Finden Sie mittels einer Galilei-Rücktransformation die Endgeschwindigkeiten v_{1f} und v_{2f} im Laborsystem in Abhängigkeit von v_{1i} und v_{2i}. Was passiert, wenn $m_1 \gg m_2$? (2 Punkte)

Aufgabe 3: Zentralkraft

Zwei Teilchen, die eine Kraft $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -a\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^4}$ aufeinander ausüben, fliegen aneinander vorbei. Es wirken keine externe Kräfte. Die Energie der Relativbewegung sei $E = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + U(r)$, mit $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ und $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

(a) Berechnen Sie das Potenzial $U(r)$, das zu dieser Wechselwirkungskraft gehört. Wählen Sie den Nullpunkt des Potenzials bei $r \to \infty$. (1 Punkt)

(b) Reduzieren Sie das Problem auf ein eindimensionales für $r = |\vec{r}|$ mit effektivem Potenzial. Zeigen Sie, dass $U_{\text{eff}}(r) = c/r^2$, und drücken Sie c durch a, μ und den Drehimpuls der Relativbewegung ($L = \mu r^2 \dot{\phi}$) aus. Hinweis: Die nachfolgenden Aufgaben sind auch ohne Kenntnis der Konstante c lösbar. (2 Punkte)

(c) In den nachfolgenden Aufgaben betrachten wir nur den Fall $c > 0$ und $E > 0$. Skizzieren Sie $U_{\text{eff}}(r)$ und zeichnen Sie E in die Skizze ein. Erklären Sie anhand ihrer Skizze, warum die Teilchen nicht aufeinander stoßen. Zeichnen Sie den Abstand kleinster Annäherung, $r_{\min}$, in Ihre Skizze ein. Drücken Sie $r_{\min}$ als Funktion von E und c aus. (2 Punkte)

(d) Verwenden Sie die Energieerhaltung, um eine Gleichung für $\dot{r}$ herzuleiten. Lösen Sie die Bewegungsgleichung durch Separation der Variablen, und bestimmen Sie r als Funktion von $t - t_{\min}$ (wobei $r(t_{min}) = r_{\min}$). (3 Punkte)

Aufgabe 4: Lösung des getriebenen harmonischen Oszillators durch Fourier-Transformation

Ein harmonischer Oszillator (Position $x(t)$, Masse m, Federkonstante $k = m\omega_0^2$) mit schwacher Dämpfung $\gamma \ll \omega_0$ wird durch eine Kraft $F(t) = mf(t)$ getrieben.

(a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{x}(\omega)$. (2 Punkte)

(b) Skizzieren Sie $\left|\frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)}\right|$ (1 Punkt)

(c) Für den Fall $F(t) = mf_0 \cos(\omega_1 t)$, bestimmen Sie $\tilde{f}(\omega)$ und finden Sie durch Fourier-Rücktransformation von $\tilde{x}(\omega)$ eine partikuläre Lösung $x(t)$. Drücken Sie das Ergebnis durch sin- und cos-Funktionen aus. (3 Punkte)

(d) Bonusaufgabe: Benutzen Sie Fourier-Transformationen, um die Green'sche Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators zu bestimmen. Hinweis: Finden Sie zunächst $\tilde{G}(\omega)$. Zur Rücktransformation ist folgendes Integral nützlich: (2 Bonuspunkte)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{[\omega - a - \mathrm{i}b]\,[\omega + a - \mathrm{i}b)]} = \mathrm{i}\theta(t) \frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}a-b)t} - \mathrm{e}^{(-\mathrm{i}a-b)t}}{2a}.$$

Aufgabe 5: Impuls- und Drehimpulserhaltung

Wir betrachten zwei Punktmassen m_1 und m_2 (Koordinaten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$) mit einer Wechselwirkungskraft entlang des Relativvektors $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Es wirken keine externe Kräfte.

(a) Zeigen Sie, dass der Gesamtimpuls $\vec{P}$ und der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ in diesem System erhalten sind. (3 Punkte)

(b) Drücken Sie die beiden Größen $\vec{P}$ und $\vec{L}$ in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten aus. Schreiben Sie $\vec{L} = \vec{L}_S + \vec{L}_{\text{rel}}$, wobei $\vec{L}_S$ und $\vec{L}_{\text{rel}}$ der Drehimpuls des Schwerpunktes und der relative Drehimpuls sind. (3 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass $\vec{L}_S$ und $\vec{L}_{\text{rel}}$ beide separat erhalten sind. Verwenden Sie dazu die Ergebnisse der Teilaufgaben a) und b). (1 Punkt)