Lösungsvorschlag Klausur Theorie A	Wintersemester 2009/2010
Karlsruher Institut für Technologie	
Prof. Dr. G. Schön - Dr. G. Metalidis	http://www.tfp.uni-karlsruhe.de/Lehre

Aufgabe 1: Kräfte

(a) Wir berechnen die Rotation: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = (0, 0, a - a) = 0$. Damit ist die Kraft konservativ. $\vec{F}$ ist keine Zentralkraft, da sie sich nicht die Form $\vec{F} = \alpha\vec{r}$ besitzt.

(b) Für die potenzielle Energie muss gelten: $\frac{\partial U}{\partial x} = -F_x = -ay$, $\frac{\partial U}{\partial y} = -F_y = -ax$, und $\frac{\partial U}{\partial z} = -F_z = -b$. Man sieht dann einfach, dass $U(x, y, z) = -axy - bz + c$ die gesuchte potenzielle Energie ist (wobei c eine beliebige Konstante ist).

(c) Die Arbeit ist gegeben durch $W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$. Da $\vec{F}$ konservativ ist und über eine geschlossene Bahn integriert wird, ist die geleistete Arbeit gleich 0.

Aufgabe 2: 1-dimensionaler elastischer Stoß

(a) Die Koordinate des Schwerpunkts ist $\frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2)$, wobei $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse ist. Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts finden wir durch Ableiten nach t:

$$V_S = \frac{1}{M}(m_1v_{1i} + m_2v_{2i}).$$

Die zugehörige Galilei-Transformation in das Schwerpunktsystem lautet:

$$v'_{1i} = v_{1i} - V_S \quad \text{und } v'_{2i} = v_{2i} - V_S.$$

(b) Aus der Impulserhaltung finden wir:

$$m_1v'_{1i} + m_2v'_{2i} = m_1v'_{1f} + m_2v'_{2f}.$$

Im Schwerpunktsystem gilt nun aber $m_1v'_{1i} + m_2v'_{2i} = 0$, und daraus finden wir: $v'_{2i} = -\frac{m_1}{m_2}v'_{1i}$, und außerdem $v'_{2f} = -\frac{m_1}{m_2}v'_{1f}$. Die Energie bleibt ebenfalls erhalten, also muss gelten:

$$m_1(v'_{1i})^2 + m_2(v'_{2i})^2 = m_1(v'_{1f})^2 + m_2(v'_{2f})^2.$$

Jetzt können wir v'_{2i} und v'_{2f} aus dieser Gleichung eliminieren, und finden $(v'_{1f})^2 = (v'_{1i})^2$. Analog erhalten wir $(v'_{2f})^2 = (v'_{2i})^2$. Da die Teilchen laut Aufgabenstellung zurückprallen, erhalten wir daraus

$$v'_{1f} = -v'_{1i} \quad \text{und } v'_{2f} = -v'_{2i}.$$

(c) Durch Rücktransformation ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_{1f} &= v'_{1f} + V_S = -v'_{1i} + V_S = -v_{1i} + 2V_S, \\ v_{2f} &= v'_{2f} + V_S = -v'_{2i} + V_S = -v_{2i} + 2V_S. \end{aligned}$$

Setzen wir den Ausdruck für V_S explizit ein, so erhalten wir das Ergebnis:

$$\begin{aligned} v_{1f} &= -v_{1i} + 2\left(\frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_1 v_{1i} + m_2\left(2v_{2i} - v_{1i}\right)}{m_1 + m_2}, \\ v_{2f} &= -v_{2i} + 2\left(\frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_2 v_{2i} + m_1\left(2v_{1i} - v_{2i}\right)}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Für $m_1 \gg m_2$ finden wir: $v_{1f} \approx v_{1i}$ und $v_{2f} \approx 2v_{1i} - v_{2i}$.

Aufgabe 3: Zentralkraft

(a) Mit dem Relativvektor $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ schreiben wir die Kraft als: $\vec{F} = -a\frac{\vec{r}}{r^4} = -a\frac{\hat{e}_\rho}{r^3}$. Das zugehörige Potenzial lautet:

$$U(r) = -\frac{a}{2r^2} + \mathcal{D},$$

denn dieses erfüllt die Bedingung $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$. Wir wählen die Konstante $\mathcal{D} = 0$, damit $U(r \to \infty) = 0$.

(b) Wir schreiben $\vec{r} = r\hat{e}_\rho$ in Zylinderkoordinaten. Für die Geschwindigkeit finden wir dann $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_\rho + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi$ (mit $\dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\phi}\hat{e}_\phi$, siehe Übungsblatt 11). Damit ergibt sich: $\left(\dot{\vec{r}}\right)^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L}{\mu^2 r^2}$, wobei wir den erhaltenen Drehimpuls $L = \mu r^2\dot{\phi}$ eingesetzt haben. Wir finden für die relative Energie:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r), \quad \text{mit } U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{a}{2r^2} = \frac{c}{r^2},$$

wobei $c = \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{\mu} - a\right)$.

(c) Das effektive Potential ist eine Funktion proportional zu $1/r^2$.
Es gilt $L > 0$ und $E > 0$. Die Energieerhaltung verbietet, dass $E < U_{\text{eff}}(r)$ ist. Deswegen kann r nie kleiner als r_{min} werden, weshalb die Teilchen nicht aufeinander stoßen. Wir erhalten r_{min} aus:

$$E = U_{\text{eff}}(r_{\text{min}}) \Rightarrow r_{\text{min}} = \sqrt{\frac{c}{E}}.$$

(d) Aus den Ausdrücken für die relative Energie folgt:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U_{\text{eff}}\right)} \Leftrightarrow \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{dr}{\sqrt{E - \frac{c}{r^2}}} = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{rdr}{\sqrt{Er^2 - c}}.$$

Integration dieser Gleichung ergibt:

$$t - t_{\text{min}} = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\int_{r_{\text{min}}}^{r}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{Er^2 - c}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{2}}\int_{r_{\text{min}}^2}^{r^2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{Eu - c}} = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{\sqrt{Er^2 - c}}{E}.$$

Auflösen nach $r(t)$ liefert:

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{\mu}\left(t - t_{\text{min}}\right)^2 + \frac{c}{E}}.$$

Aufgabe 4: Lösung des getriebenen harmonischen Oszillators durch Fourier-Transformation

(a) Die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators lautet:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tilde{f}(\omega),$$

wobei wir die äußere Kraft $f(t)$ als Fourier-Rücktransformierte von $\tilde{f}(\omega)$ geschrieben haben. Machen wir das Gleiche für $x(t)$, so ergibt sich

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tilde{x}(\omega).$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir dann

$$\left(-\omega^2 + 2\mathrm{i}\gamma + \omega_0^2\right) \tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega),$$

und daraus

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\mathrm{i}\gamma\omega}.$$

(b) Es gilt $\left|\frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$. Dieser Ausdruck hat die Form einer Resonanzkurve:

(c) Die Fourier-Transformierte der äußerem Kraft $f(t)$ ist gegeben durch:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f_0 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t f_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t}}{2} = \pi f_0 \left[\delta(\omega-\omega_1) + \delta(\omega+\omega_1)\right].$$

Damit erhalten wir $x(t)$ durch Fourier-Rücktransformation von $\tilde{x}(\omega)$:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tilde{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \frac{\tilde{f}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\mathrm{i}\gamma\omega} \\
&= \frac{f_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \frac{\delta(\omega-\omega_1) + \delta(\omega+\omega_1)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\mathrm{i}\gamma\omega} \\
&= \frac{f_0}{2} \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t}}{(\omega_0^2 - \omega_1^2) + 2\mathrm{i}\gamma\omega_1} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}}{(\omega_0^2 - \omega_1^2) - 2\mathrm{i}\gamma\omega_1}\right] \\
&= \frac{f_0}{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_1^2} \left[\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)\cos(\omega_1 t) + 2\gamma\omega_1 \sin(\omega_1 t)\right].
\end{aligned}$$

(d) Zur Bestimmung der Green'schen Funktion betrachten wir $f(t) = \delta(t)$, d.h. $\tilde{f}(\omega) = 1$. Die Green'sche Funktion finden wir dann aus

$$\begin{aligned}
G(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tilde{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\mathrm{i}\gamma\omega} \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-)},
\end{aligned}$$

mit $\omega_\pm = \pm\Omega + \mathrm{i}\gamma$, und $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Mit der angegebenen Stammfunktion ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
G(t) &= \frac{-\mathrm{i}\theta(t)}{2\Omega} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\right] \mathrm{e}^{-\gamma t} \\
&= \theta(t) \frac{1}{\Omega} \sin(\Omega t) \mathrm{e}^{-\gamma t}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Impuls- und Drehimpulserhaltung

(a) Der Gesamtimpuls ist: $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Damit finden wir: $\dot{\vec{P}} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_{12}^{\mathrm{WW}} + \vec{F}_1^{\mathrm{ext}} + \vec{F}_{21}^{\mathrm{WW}} + \vec{F}_2^{\mathrm{ext}} = 0$, da $\vec{F}_{12}^{\mathrm{WW}} = -\vec{F}_{21}^{\mathrm{WW}}$ gilt, und die externen Kräfte Null sind. Der Gesamtimpuls ist also erhalten.
Der Gesamtdrehimpuls ist: $\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = m_1\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \vec{v}_2$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{L}} &= m_1\vec{v}_1 \times \vec{v}_1 + m_1\vec{r}_1 \times \dot{\vec{v}}_1 + m_2\vec{v}_2 \times \vec{v}_2 + m_2\vec{r}_2 \times \dot{\vec{v}}_2 \\
&= 0 + \vec{r}_1 \times \dot{\vec{p}}_1 + 0 + \vec{r}_2 \times \dot{\vec{p}}_2 \\
&= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}^{\mathrm{WW}} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}^{\mathrm{WW}} \\
&= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}^{\mathrm{WW}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

weil die Wechselwirkungskraft parallel zu $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ist.

(b) Die Schwerpunktskoordinate ist $\vec{R} = \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$. Daraus folgt sofort: $M\dot{\vec{R}} = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = \vec{P}$.
Die Relativkoordinate ist $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Wir können jetzt die Vektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ mit Hilfe der Schwerpunkts- und Relativkoordinate ausdrücken. Wir erhalten:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}, \quad \text{und } \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r},$$

wobei wir die Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ definiert haben. Damit ergibt sich für für den Drehimpuls:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= m_1\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 \\
&= m_1\left(\vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}\right) \times \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right) + m_2\left(\vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}\right) \times \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right) \\
&= m_1\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \frac{m_1 m_2^2}{M^2}\vec{r} \times \dot{\vec{r}} + m_2\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \frac{m_1^2 m_2}{M^2}\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\
&= M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \frac{m_1 m_2}{M^2}(m_2 + m_1)\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\
&= M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\
&= \vec{L}_S + \vec{L}_{\mathrm{rel}}.
\end{aligned}$$

(c) $\dot{\vec{L}}_S = M\dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}} + M\vec{R} \times \ddot{\vec{R}} = 0 + \vec{R} \times \dot{\vec{P}} = 0 + 0 = 0$. Der Drehimpuls des Schwerpunktes $\vec{L}_S$ ist erhalten. Wir haben in Teilaufgabe (a) schon bewiesen, dass auch der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ erhalten ist. Da $\vec{L} = \vec{L}_S + \vec{L}_{\mathrm{rel}}$, folgt damit dass auch $\vec{L}_{\mathrm{rel}}$ erhalten ist.