Schriftliche Modulprüfung zur Vorlesung Klassische Theoretische Physik I

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. T. Ewerth
Institut für Theoretische Teilchenphysik

WS 10/11, 16.02.2011
Bearbeitungsdauer: 120 min

Name:

Matrikelnummer:

Studiengang (bitte ankreuzen):
- ☐ Bachelor Physik
- ☐ Bachelor Geophysik
- ☐ Bachelor Meteorologie
- ☐ Bachelor Mathematik
- ☐ Lehramt Mathematik/Physik
- ☐ Lehramt Mathematik/NwT
- ☐ sonst: ____________________

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Abgesehen von Schreibzeug und unbeschriebenem Papier werden keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe	Punkte	
1 (9P)		
2 (5P)		
3 (8P)		
4 (12P)		
Σ (34P)		

Note:

Aufgabe 1 (9P): Vermischtes

(a) Ein Massenpunkt m befinde sich im Potential

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}\,,$$

wobei $\alpha > 0$ und $r = |\vec{r}\,|$. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass der Drehimpuls des Massenpunktes bezüglich des Zentrums des Potentials eine Erhaltungsgröße ist.

(b) Berechnen Sie die Kräfte, die zu den beiden Potentialen

$$\text{(i)}\quad U(\vec{r}\,) = k \exp\left(\frac{|\vec{r} - \vec{a}|}{b}\right), \qquad \text{(ii)}\quad U(\vec{r}\,) = \frac{k}{|\vec{r}\,|^{3/2}}\,,$$

gehören, wobei k und b Konstanten sind und $\vec{a}$ ein konstanter Vektor ist.

(c) Sind die folgenden beiden Käfte konservativ?

$$\text{(i)}\quad \vec{F}(\vec{r}\,) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)}\quad \vec{F}(\vec{r}\,) = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x}(t) - kx(t) = f$ an, wobei k und f positive Konstanten sind.

(e) Skizzieren Sie die Bahnkurve des freien gedämpften harmonischen Oszillators für den Schwingfall im Phasenraumdiagramm. Die Bewegungsgleichung muss dazu nicht explizit gelöst werden.

Aufgabe 2 (5P): Kreisbewegung

Ein Massenpunkt m bewege sich in der xy-Ebene unter der Einwirkung einer Kraft $\vec{F}(\vec{r}\,)$. Die Lösung der Bewegungsgleichung lautet

$$\vec{r}(t) = a\cos(\omega t)\,\vec{e}_x + b\sin(\omega t)\,\vec{e}_y\,, \tag{$*$}$$

wobei a, b und ω festgelegte Konstanten sind.

(a) Bestimmen Sie aus der Newtonschen Bewegungsgleichung die auf den Massenpunkt wirkende Kraft $\vec{F}$.

(b) Bestimmen Sie die Arbeit

$$W = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}\,,$$

die von der Kraft $\vec{F}$ verrichtet wird, wenn sich der Massenpunkt m entlang der Bahnkurve $(*)$ von $(a, 0, 0)$ nach $(0, b, 0)$ bewegt, durch explizites Ausrechnen des Wegintegrals.

(c) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe (b), indem Sie das zur Kraft $\vec{F}$ zugehörige Potential bestimmen.

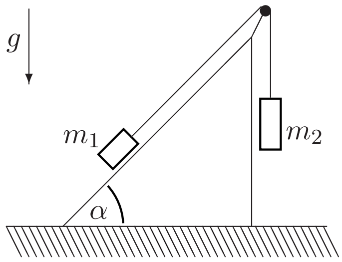
Bitte wenden.

Aufgabe 3 (8P): Schiefe Ebene

Betrachten Sie zwei Massen m_1 und m_2, die sich im konstanten Schwerefeld der Erde befinden. Sie sind über ein masseloses Seil und eine masselose Rolle miteinander verbunden, wobei sich die Masse m_1 auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α befindet, während die Masse m_2 an einer Seite überhängt (siehe Abbildung). Die Massen m_1 und m_2 seien so gewählt, dass sich die Masse m_1 aufwärts bewegt.

(a) Berechnen Sie die Beschleunigungen der beiden Massen und die Seilspannung unter der Annahme, dass sich die Masse m_1 reibungslos auf der schiefen Ebene bewegt. Drücken Sie Ihre Ergebnisse durch die Grössen m_1, m_2, α und g aus.

(b) Wiederholen Sie Ihre Rechnung aus Teilaufgabe (a) für den Fall, dass die Masse m_1 bei der Aufwärtsbewegung einer Gleitreibung $\vec{F}_R$ ausgesetzt ist, welche proportional zur Normalkraft $\vec{F}_N$ ist. Das heißt, es gilt $|\vec{F}_R| = \mu|\vec{F}_N|$ mit $\mu > 0$. Drücken Sie Ihre Ergebnisse durch die Grössen m_1, m_2, μ, α und g aus.



Aufgabe 4 (12P): Lineares Potential

Ein Massenpunkt m befinde sich im linearen Potential $U(\vec{r}) = \gamma r$, mit $\gamma > 0$ und $r = |\vec{r}|$.

(a) Nehmen Sie an, dass die Bewegung in der xy-Ebene stattfindet. Warum? Begründen Sie Ihre Antwort.

Verwenden Sie zur Beschreibung der Bewegung Zylinderkoordinaten

$$\vec{r}(\rho, \phi, z) = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix},$$

wobei sich der Koordinatenursprung im Zentrum des Potentials befinden soll.

(b) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls des Massenpunktes bezüglich des Koordinatenursprungs gegeben ist durch $\vec{L} = m\rho^2\dot{\phi}\,\vec{e}_z$.

(c) Zeigen Sie, dass sich die Gesamtenergie E des Massenpunktes schreiben läßt als

$$E = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}}(\rho)\,, \quad U_{\text{eff}}(\rho) = \frac{L^2}{2m\rho^2} + \gamma\rho\,,$$

wobei $L = |\vec{L}|$. Ist E eine Erhaltungsgröße? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Skizzieren Sie $U_{\text{eff}}(\rho)$ und finden Sie die Beziehung zwischen Radius und Drehimpuls, für die sich der Massenpunkt auf einer stabilen Kreisbahn mit Radius ρ_0 bewegt. Welchen Wert nimmt $U_{\text{eff}}(\rho)$ bei $\rho = \rho_0$ an? Bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω_0 in Abhängigkeit von ρ_0.

(e) Betrachten Sie nun kleine Auslenkungen aus dieser stabilen Kreisbahn in radialer Richtung, das heißt ersetzen Sie $\rho(t)$ durch $\rho_0 + \delta(t)$ mit $\delta(t) \ll \rho_0$. Zeigen Sie, dass diese kleinen Auslenkungen zu harmonischen Schwingungen um die Kreisbahn führen, und berechnen Sie die Kreisfrequenz dieser Schwingungen. *Hinweis:* Entwickeln Sie $U_{\text{eff}}(\rho)$ um $\rho = \rho_0$ in eine Taylorreihe bis einschließlich Ordnung δ^2.