Aufgabe 1: Vektoren **[3 + 3 = 6]**

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (2, 7, 1)$ und $\vec{b} = (1, 2, 0)$.

(a) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$ der Länge $|\vec{c}| = 2$ in der $\vec{a}$–$\vec{b}$–Ebene mit $\vec{c} \perp \vec{b}$.

(b) Bestimmen Sie den parametrisierten Weg $\vec{r}(\varphi)$ für den Kreis in der $\vec{a}$–$\vec{b}$–Ebene mit Radius $R = 3$ und Mittelpunkt $M(0|3|1)$.

Lösung:

(a) Wir zerlegen $\vec{a}$ in eine Parallel– und eine Senkrechtkomponente bezüglich $\vec{b}$, $\vec{a} = \vec{a}_{||} + \vec{a}_{\perp}$,

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^2}\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2+14}{1+4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{16}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10-16 \\ 35-32 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Der Betrag lautet $|\vec{a}_{\perp}| = \frac{1}{5}\sqrt{36+9+25} = \frac{1}{5}\sqrt{70}$. $\vec{c}$ ist dann doppelt so lang, wie $\hat{a}_{\perp}$, also

$$\vec{c} = \frac{2}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

(b) Wir konstruieren um den Mittelpunkt herum einen Kreis mit Hilfe des Ortsvektors $\vec{m}$ zum Mittelpunkt sowie zweier orthogonaler Vektoren in der $\vec{a}$–$\vec{b}$–Ebene, nämlich $\hat{a}_{\perp}$ und $\hat{b}$. Der Betrag von $\vec{b}$ ist $|\vec{b}| = \sqrt{5}$, also

$$\vec{r}(\varphi) = \vec{m} + 3\hat{a}_{\perp}\cos\varphi + 3\hat{b}\sin\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2: Bewegung im räumlichen harmonischen Oszillator **[4 + 2 = 6]**

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im $\mathbb{R}^3$ im Potential eines harmonischen Oszillators $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$. Der minimale Radius der Bahn sei $r_1 = R$ und der maximale $r_2 = 2R$.

(a) Bestimmen Sie die Energie und den Drehimpuls.

(b) Wie groß sind die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_1$ und $\dot{\varphi}_2$ bei r_1 und r_2?

Lösung:

(a) Drehimpuls und Energie sind im Zentralpotential Erhaltungsgrößen und damit konstant. An den Umkehrpunkten r_1, r_2 steckt die gesamte Energie im effektiven Potential

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 .$$

Damit haben wir zwei Gleichungen an den Umkehrpunkten,

$$E = \frac{L^2}{2mR^2} + \frac{1}{2}kR^2 = \frac{L^2}{2m(2R)^2} + \frac{1}{2}k(2R)^2 .$$

Auflösen der zweiten Gleichung nach L ergibt $L = 2R^2\sqrt{km} = 2mR^2\sqrt{\frac{k}{m}}$. Damit ergibt sich für die Energie $E = \frac{5}{2}kR^2$.

(b) Aus $L = mr^2\dot{\varphi}$ erhalten wir sofort

$$\dot{\varphi}_1 = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (r = R)\,, \qquad \dot{\varphi}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (r = 2R)\,.$$

Aufgabe 3: Kraft und Arbeit **[9]**

Wir untersuchen ein Kraftfeld ($\alpha = \text{const.}$)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \alpha \left(xy, z^2, yz \right).$$

Wie groß ist die Arbeit, die gegen das Feld aufgebracht werden muss, um eine Punktmasse auf der Parabel

$$y = x^2 - 4, z = 1$$

von ihrem Scheitelpunkt $(0|-4|1)$ bis zu ihrem Schnittpunkt mit der x–z–Ebene $(2|0|1)$ zu bewegen.

Lösung: Wir parametrisieren zunächst den Weg direkt mit x,

$$\vec{r}(x) = (x, x^2 - 4, 1) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}x} = (1, 2x, 0)\,.$$

Die Kraft entlang der Kurve wird ebenfalls mit x parametrisiert,

$$\vec{F} = \alpha \left(x(x^2 - 4), 1, x^2 - 4 \right)\,.$$

Die gegebenen Anfangs– und Endpunkte der Kurve entsprechen $x = 0$ und $x = 2$. Damit erhalten wir die Arbeit

$$\begin{aligned} W &= -\int_K \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{x_0}^{x_1} \vec{F}(x) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -\alpha \int_0^2 \begin{pmatrix} x(x^2-4) \\ 1 \\ x^2 - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}x \\ &= -\alpha \int_0^2 \left[x(x^2 - 4) + 2x \right] \mathrm{d}x = -\alpha \int_0^2 \left[x^3 - 2x \right] \mathrm{d}x = -\,\alpha \left(\frac{x^4}{4} - x^2 \right)\Big|_0^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Rotation **[8]**

Berechnen Sie die Rotation des Feldes

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}}{r^2} \qquad (\vec{\omega} = \text{const.}).$$

Lösung: Wir berechnen die i–te Komponente der Rotation. Wir schreiben dazu die Kreuzprodukte mit Hilfe des ϵ–Tensors,

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \right)_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j A_k(\vec{r}) = \sum_{jk} \sum_{lm} \epsilon_{ijk} \partial_j \frac{\epsilon_{klm} \omega_l r_m}{r^2} = \sum_{jk} \sum_{lm} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \omega_l \partial_j \frac{r_m}{r^2}\,.$$

Im folgenden brauchen wir (mit $\partial_j r_m = \delta_{jm}$)

$$\partial_j r = \partial_j \sqrt{\sum_k r_k r_k} = \frac{2r_j}{2\sqrt{\sum_k r_k r_k}} = \frac{r_j}{r}\,.$$

Damit erhalten wir

$$\partial_j \frac{r_m}{r^2} = \frac{1}{r^2}\partial_j r_m + r_m \partial_j \frac{1}{r^2} = \frac{\delta_{jm}}{r^2} - 2r_m r_j \frac{1}{r^4}.$$

wobei wir

$$\partial_j \frac{1}{r^2} = -2\frac{1}{r^3}\partial_j r = -\frac{2}{r^3}\frac{r_j}{r}$$

verwendet haben. Insgesamt bekommen wir also ($\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$)

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})\right)_i &= \sum_j \sum_{lm} \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) \omega_l \left(r^2\delta_{jm} - 2r_m r_j\right) \frac{1}{r^4} \\ &= \frac{1}{r^4}\left(\omega_i 3r^2 - \omega_i 2r^2 + \sum_j \omega_j r^2 \delta_{ij} + \omega_j 2 r_i r_j\right) = \frac{2r_i \vec{\omega}\cdot\vec{r}}{r^4} ,\end{aligned}$$

also

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{\omega}\times\vec{r}}{r^2} = \frac{2(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^4} .$$

Aufgabe 5: Corioliskraft am Äquator **[5]**

Eine Person der Masse $m = 50\,\mathrm{kg}$ befinde sich am Äquator der Erde. Die Person bewegt sich mit der Geschwindigkeit $|\vec{v}| = v$ in Nord–Ost–Richtung. Berechnen Sie das Verhältnis der Beträge von Zentrifugal– und Corioliskraft.

Lösung: Die Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z$ und Corioliskraft $\vec{F}_C$ sind durch

$$\vec{F}_Z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega}\times\vec{r}) , \qquad \vec{F}_C = -2m(\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}})$$

gegeben. Mit $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ erhalten wir sofort die Zentrifugalkraft, die in positive $\hat{r}$ Richtung zeigt,

$$\vec{F}_Z = m\omega^2\vec{r} = m\omega^2 r\hat{r} .$$

Für die Corioliskraft brauchen wir die Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{v}{\sqrt{2}}(\hat{x}+\hat{z})$, wenn $\hat{x}$ nach Osten und $\hat{z}$ am Äquator nach Norden zeigt, also $\hat{z}||\vec{\omega}$. Damit erhalten wir

$$\vec{F}_C = 2m\omega\frac{v}{\sqrt{2}}\hat{r} .$$

Das Verhältnis der Beträge lautet dann

$$\frac{F_Z}{F_C} = \frac{v\sqrt{2}}{\omega r} .$$

Aufgabe 6: Kurve **[$4+2+4+1+1=12$]**

Gegeben ist eine mit dem dimensionslosen Parameter t parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^3$

$$\vec{r}(t) = \left(\sqrt{2}\cos t + \sin t - t, \sqrt{2}\cos t - \sin t + t, \sqrt{2}\sin t + \sqrt{2}t\right) .$$

Berechnen Sie

(a) den normierten Tangentenvektor $\hat{t}$,

(b) die Länge $s(t)$ der Kurve vom Punkt $t = 0$ aus gemessen,

(c) die Krümmung κ,

(d) den Radius ρ des Krümmungskreises.

(e) Welche Gestalt hat die Kurve?

Lösung:

(a) Durch differenzieren erhalten wir sofort

$$\dot{\vec{r}} = \left(-\sqrt{2}\sin t + \cos t - 1, -\sqrt{2}\sin t - \cos t + 1, \sqrt{2}\cos t + \sqrt{2}\right)$$

mit

$$\begin{aligned}|\dot{\vec{r}}|^2 =& 2\sin^2 t + \cos^2 t + 1 - 2\sqrt{2}\sin t\cos t + 2\sqrt{2}\sin t - 2\cos t \\ &+ 2\sin^2 t + \cos^2 t + 1 + 2\sqrt{2}\sin t\cos t - 2\sqrt{2}\sin t - 2\cos t + 2\cos^2 t + 2 + 4\cos t = 8\,,\end{aligned}$$

also $|\dot{\vec{r}}| = 2\sqrt{2}$ und

$$\hat{t} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2}\sin t + \cos t - 1, -\sqrt{2}\sin t - \cos t + 1, \sqrt{2}\cos t + \sqrt{2}\right)\,.$$

(b) Wir erhalten sofort

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(t)|\mathrm{d}t = \int_0^t 2\sqrt{2}\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}t\,.$$

(c) Für $\kappa = \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t} / \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ berechnen wir zunächst

$$\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2}\cos t - \sin t, -\sqrt{2}\cos t + \sin t, -\sqrt{2}\sin t\right)\,,$$

also

$$\left|\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t}\right|^2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\,.$$

Mit $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}$ (s.o.) ergibt sich also $\kappa = 1/4$.

(d) $\rho = 1/\kappa = 4$.

(e) Der konstante Krümmungsradius deutet auf einen Kreis. Jedoch entwickelt sich die Kurve z.B. für $t \to \infty$ entlang der Richtung $(-1, 1, \sqrt{2})$ weiter. Vermutlich handelt es sich um eine Spirale. Wir zerlegen $\vec{r}(t)$ in drei Anteile proportional $\cos t$, $\sin t$, t,

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \cos t(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) + \sin t(1, -1, \sqrt{2}) + t(-1, 1, \sqrt{2}) \\ &= 2\left(\cos t(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) + \sin t(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) + t(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})\right) \\ &= 2\left(\hat{e}_1\cos t + \hat{e}_2\sin t + \hat{e}_3 t\right)\,.\end{aligned}$$

Wir sehen, dass $\hat{e}_1 \perp \hat{e}_2 \perp \hat{e}_3$. Damit haben wir eine Kreisbewegung in der $\hat{e}_1$–$\hat{e}_2$–Ebene (Radius 2) überlagert mit einer linearen Bewegung in $\hat{e}_3$–Richtung, also eine Spirale.

Aufgabe 7: Hoher senkrechter Wurf **[3 + 4 + 3 + 3 + 1 = 14]**

Wir katapultieren einen Gegenstand der Masse m reibungslos und senkrecht von der Erdoberfläche ($z = 0$, Erdmittelpunkt bei $z = -R$) in eine enorme Höhe, so dass die Erdanziehungskraft nicht mehr als konstant angenommen werden kann. Das Gravitationspotential lautet dann mit einem ersten Korrekturterm

$$V(z) = mgz\left(1 - \frac{\alpha^2}{2g}z\right), \qquad \alpha^2 = \frac{2g}{R}.$$

(a) Wie lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung für die Koordinate $z(t)$ des Gegenstandes?

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $z(t)$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung für die Anfangsbedingungen $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = v_0$.

(d) Nehmen Sie $\alpha t \ll 1$ an und bestimmen Sie die erste nichtverschwindende Korrektur von $z(t)$ im Vergleich zum Fall $\alpha = 0$.

(e) Befindet sich der Gegenstand im Vergleich zum Fall $\alpha = 0$ länger oder kürzer in der Luft?

Lösung:

(a) Aus dem Potential bestimmen wir die Kraft, $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$. In unserem Fall hat die Kraft nur eine z–Komponente, also lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{z} = F_z = -\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z} = -mg + m\alpha^2 z \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ddot{z} - \alpha^2 z = -g\,.$$

(b) Es handelt sich um eine inhomogene, lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$z_h(t) = A\mathrm{e}^{\alpha t} + B\mathrm{e}^{-\alpha t}\,.$$

Die Inhomogenität ist eine konstante, das setzen wir auch als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung an, $z_s(t) = C$. Durch einsetzen in die DGL erhalten wir $C = g/\alpha^2$, also haben wir die allgemeine Lösung

$$z(t) = A\mathrm{e}^{\alpha t} + B\mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{g}{\alpha^2}\,.$$

(c) Die Anfangsbedingungen geben uns die zwei Gleichungen, $z(0) = A + B + \frac{g}{\alpha^2} = 0$ sowie $\dot{z}(0) = \alpha(A - B) = v_0$ mit den Lösungen mit den Lösungen $A = \frac{1}{2}(\frac{v_0}{\alpha} - \frac{g}{\alpha^2})$ und $B = -\frac{1}{2}(\frac{v_0}{\alpha} + \frac{g}{\alpha^2})$. Damit ergibt sich für unser Anfangswertproblem die Lösung

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{\alpha} - \frac{g}{\alpha^2}\right)\mathrm{e}^{\alpha t} - \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{\alpha} + \frac{g}{\alpha^2}\right)\mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{g}{\alpha^2} \\ &= \frac{v_0}{\alpha}\sinh\alpha t - \frac{g}{\alpha^2}\cosh\alpha t + \frac{g}{\alpha^2}\,. \end{aligned}$$

(d) Für kleine αt entwickeln wir die e–Funktionen. Damit sich die Terme $1/\alpha^2$ wegheben sollten wir zumindest bis $(\alpha t)^3$ entwickeln, damit wir eine Korrektur bekommen. Wegen der unterschiedlichen Potenzen von α in den Koeffizienten entwickeln wir vorsichtshalber bis $(\alpha t)^4$. Die Entwicklung der e–Funktion schreiben wir direkt hin,

$$\begin{aligned} z(t) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{\alpha} - \frac{g}{\alpha^2}\right)&\left[1 + \alpha t + \frac{1}{2}\alpha^2 t^2 + \frac{1}{6}\alpha^3 t^3 + \frac{1}{24}\alpha^4 t^4 + \cdots\right] \\ &- \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{\alpha} + \frac{g}{\alpha^2}\right)\left[1 - \alpha t + \frac{1}{2}\alpha^2 t^2 - \frac{1}{6}\alpha^3 t^3 + \frac{1}{24}\alpha^4 t^4 + \cdots\right] + \frac{g}{\alpha^2} . \end{aligned}$$

Beim Ausmultiplizieren fallen die Terme mit α im Nenner heraus. Vorsicht ist geboten, weil $\frac{v_0}{\alpha}(\alpha t)^3$ und $\frac{g}{\alpha^2}(\alpha t)^4$ die gleiche Potenz in α ergeben. Wir erhalten

$$z(t) \approx v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{6} v_0 \alpha^2 t^3 - \frac{1}{24} g \alpha^2 t^4 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + \left(v_0 t - \frac{1}{4} g t^2\right)\frac{(\alpha t)^2}{6} .$$

(e) Physikalische Begründung: da das Potential mit zunehmender Höhe schwächer wird, wird auch der der Gegenstand nicht so stark abgebremst. Damit fliegt er höher und auch länger.

Schreiben wir die Antwort aus Teil (d) etwas um, so erhalten wir

$$z(t) \approx \left(v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right)\left(1 + \frac{(\alpha t)^2}{6}\right) + \frac{g t^2}{24}(\alpha t)^2 .$$

Ohne Korrektur trifft der Gegenstand wieder bei $t' = 2v_0/g$ auf den Boden auf. Das ist die Zeit zu der der erste Term gerade verschwindet. Der zweite Term ist dann immer noch positiv, also $z(t') > 0$, so dass der Gegenstand länger in der Luft ist.