INSTITUT FÜR THEORETISCHE TEILCHENPHYSIK

Klassische Theoretische Physik I

WS 2012/13

PROF. U. NIERSTE
DR. M. WIEBUSCH

Erste Klausur
21.2.2013
Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Aufgabe 1: Drehungen im $\mathbb{R}^3$ (10 Punkte)

$R = R(\vec{\phi})$ bezeichne die Matrix einer Drehung um die Achse $\vec{n} = \vec{\phi}/\phi$ mit dem Winkel $\phi \neq 0$.

a) Welche der folgenden Eigenschaften ist (für beliebiges $\vec{\phi} \neq 0$) erfüllt?
i) $R^T R = \mathbb{1}$, ii) $R^T = R$, iii) $R(-\vec{\phi}) = R(\vec{\phi})^T$, iv) $\det R = 1$,
v) Die j-te Spalte steht senkrecht auf der j-ten Zeile für $j = 1, 2, 3$.
Geben Sie bei jeder Eigenschaft an, ob sie richtig oder falsch ist. Ein Beweis oder Gegenbeispiel ist nicht erforderlich. (5 Punkte)

b) Beweisen Sie $\left(R - R^T\right)\vec{n} = 0$. (1 Punkt)

c) Betrachten Sie die Drehmatrix

$$R(\vec{\phi} = \phi\vec{n}) = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie $\phi \in [0, \pi]$.

Hinweis:

ϕ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\phi$	1	$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

(1 Punkt)

ii) Bestimmen Sie $\pm\vec{n}$. (Auf die Orientierung von $\vec{n}$ kommt es hier nicht an.) (2 Punkte)

iii) Bestimmen Sie das Vorzeichen von $\vec{n}$ so, dass mit $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)^T$ die Ungleichung $\left(\vec{e}_1 \times R(\vec{\phi})\vec{e}_1\right) \cdot \vec{n} > 0$ erfüllt ist. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Kreuzprodukt und Scheinkräfte (8 Punkte)

a) Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{v}$ kann in Komponentenform als $v_j = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} a_k b_l$ geschrieben werden. Berechnen Sie

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \quad \text{und} \quad \left[\vec{a} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right]_j.$$

Hinweis: $\sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$. (2 Punkte)

b) Vereinfachen Sie das folgende Kreuzprodukt (d.h. formen Sie den Ausdruck so um, dass er nur noch ein Kreuzprodukt enthält): (2 Punkte)

$$\left[\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right] \times \vec{c}.$$

c) Es sei $\vec{A}(\vec{r})$ ein beliebiges (zweimal stetig differenzierbares) Vektorfeld. Formen Sie

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})\right)$$

in einen Ausdruck um, der kein Kreuzprodukt mehr enthält. (1 Punkt)

d) Ein Bezugssystem bewege sich (gegenüber einem gegebenen Inertialsytem) mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse, d.h. $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_3$. Ort und Geschwindigkeit eines Massenpunkts mit Masse m seien im rotierenden Bezugssystem durch $\vec{r} = (x, y, z)^T$ und $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$ gegeben.
Berechnen Sie die Komponenten der Corioliskraft

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

und der Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_Z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

(3 Punkte)

Aufgabe 3: Zentralkraft (7 Punkte)

Ein Himmelskörper mit Masse m bewege sich im Schwerefeld der Sonne; alle anderen Himmelskörper des Universums sind hier zu vernachlässigen. Die Bahnkurve ist in ebenen Polarkoordinaten (r, θ) durch

$$r(\theta) = \frac{l^2}{\mu\alpha[1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)]}$$

mit $-\pi < \theta < \pi$ gegeben. (Die kartesischen Koordinaten sind also $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.) Die potentielle Energie ist $U(r) = -\alpha/r$ mit $\alpha > 0$, μ bezeichnet die reduzierte Masse, und l ist der Betrag des Drehimpulses. Der Himmelskörper habe zur Zeit $t = -\infty$ den Ortsvektor $\vec{r}_0 = (-\infty, -b, 0)^T$ und eine Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_1$ mit $b, v_0 > 0$.

a) Drücken Sie μ durch m und die Sonnenmasse M aus und entwickeln Sie μ zur ersten Ordnung in m/M. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Energie E und den Drehimpuls l als Funktion von μ, α, v_0 und b. (1 Punkt)

c) Bestimmen Sie die Exzentrizität (1 Punkt)

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}.$$

d) Bestimmen Sie $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ als Funktion von μ, α, v_0 und b. Hinweis: Der Wertebereich von arccos ist $[0, \pi]$. (1 Punkt)

e) Geben Sie an, unter welchem Winkel der Himmelskörper das Sonnensystem wieder verlässt, bestimmen Sie also $\lim_{t\to\infty} \theta(t)$ als Funktion von θ_0. (1 Punkt)

Aufgabe 4: Bahnkurve (15 Punkte)

Ein Massenpunkt bewege sich in der x-y-Ebene gemäß der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\alpha\dot{x} - \omega\dot{y} \\ \ddot{y} &= -\alpha\dot{y} + \omega\dot{x} \end{aligned}$$

mit $\alpha, \omega > 0$.

a) Bestimmen Sie $(v_x, v_y) = (\dot{x}, \dot{y})$ als Funktion der Zeit t mit Anfangsbedingung $(v_x(0), v_y(0)) = (v_{x0}, v_{y0})$ für den Spezialfall $\omega = 0$. (2 Punkte)

b) Transformieren Sie zur Vereinfachung des Problems $z_x = v_x e^{\alpha t}$, $z_y = v_y e^{\alpha t}$ und geben Sie (nun für $\omega \neq 0$) die Differentialgleichungen an, die z_x und z_y erfüllen. (2 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Lösung $(z_x(t), z_y(t))$ zur Anfangsbedingung $(z_x(0), z_y(0)) = (v_{x0}, 0)$. [Achtung: $v_{y0} = 0$.]
Hinweis: Wenn Ihnen kein Lösungsansatz einfällt, differenzieren Sie zunächst die Gleichung für $\dot{z}_x$ nach t. (2 Punkte)

d) Geben Sie $(v_x(t), v_y(t))$ zur Anfangsbedingung $(v_x(0), v_y(0)) = (v_{x0}, 0)$ an. (1 Punkt)
Welchen Weg legt der Massenpunkt zwischen $t = 0$ und $t = \infty$ zurück? (1 Punkt)

e) Bestimmen Sie $(x(t), y(t))$ für die Anfangsbedingung $(x(0), y(0)) = (x_0, \omega x_0/\alpha)$ mit $(v_x(0), v_y(0)) = (-x_0(\alpha^2 + \omega^2)/\alpha, 0)$. Dabei sei $x_0 > 0$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden:

$$\begin{aligned} \int dt\, \exp(-\alpha t)\cos(\omega t) &= e^{-\alpha t}\frac{\omega\sin(\omega t) - \alpha\cos(\omega t)}{\alpha^2 + \omega^2} + C, \\ \int dt\, \exp(-\alpha t)\sin(\omega t) &= e^{-\alpha t}\frac{-\omega\cos(\omega t) - \alpha\sin(\omega t)}{\alpha^2 + \omega^2} + C' \end{aligned}$$

(4 Punkte)

f) Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t))$. (1 Punkt)

g) Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima von $y(t)$ und geben Sie die zugehörigen Werte von $(t, x(t), y(t))$ an. Vereinfachen Sie die Ausdrücke so weit wie möglich. Geben Sie an, welche Punkte Minima und welche Maxima sind. (2 Punkte)