Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I
WS 2012/13

Prof. U. Nierste
Dr. M. Wiebusch

Zweite Klausur
11.4.2013
Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Aufgabe 1: Drehungen im $\mathbb{R}^3$ (9 Punkte)

$R = R(\vec{\phi})$ bezeichne die Matrix einer Drehung um die Achse $\vec{n} = \vec{\phi}/\phi$ mit dem Winkel $\phi \neq 0$.

a) Welche der folgenden Eigenschaften ist (für beliebiges $\vec{\phi} \neq 0$) erfüllt?
i) $R^{\mathsf{T}}R = \mathbb{1}$, ii) $R^{\mathsf{T}} = R$, iii) $R(-\vec{\phi}) = [R(\vec{\phi})]^{-1}$, iv) $R\vec{\phi} = \vec{\phi}$,
v) Der i-te Spaltenvektor steht senkrecht auf dem j-ten Spaltenvektor für $i \neq j$.
Geben Sie bei jeder Eigenschaft an, ob sie richtig oder falsch ist. Ein Beweis oder Gegenbeispiel ist nicht erforderlich. (5 Punkte)

b) Betrachten Sie die Drehmatrix

$$R(\vec{\phi} = \phi\vec{n}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{7}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} .$$

i) Bestimmen Sie $\phi \in [0, \pi]$.

Hinweis:

ϕ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\phi$	1	$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

(1 Punkt)

ii) Bestimmen Sie $\pm\vec{n}$. (Auf die Orientierung von $\vec{n}$ kommt es hier nicht an.)
Hinweis: Sie dürfen $(R - R^{\mathsf{T}})\vec{n} = 0$ verwenden. (2 Punkte)

iii) Bestimmen Sie das Vorzeichen von $\vec{n}$ so, dass mit $\vec{e}_1 = (1,0,0)^{\mathsf{T}}$ die Ungleichung $(\vec{e}_1 \times R(\vec{\phi})\vec{e}_1) \cdot \vec{n} > 0$ erfüllt ist. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Reibungskraft (4 Punkte)

Ein Körper der Masse m bewege sich zur Zeit $t = 0$ mit der Geschwindigkeit $v(0) = v_0$ in x-Richtung. Auf den Körper wirke die (geschwindigkeitsabhängige) Reibungskraft $F_R(t) = -m\lambda v(t)$, wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit t ist.

a) Geben Sie eine Differentialgleichung für v an. (1 Punkt)

b) Lösen Sie die Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$. Drücken Sie $v(t)$ durch v_0, λ und m aus. (1 Punkt)

c) Berechnen Sie die Strecke $s(T)$, die der Körper zwischen $t = 0$ und $t = T$ zurücklegt. Druücken Sie $s(T)$ durch v_0, m, λ und T aus. (1 Punkt)

d) Berechnen Sie die kinetische Energie E zum Zeitpunkt t. Drücken Sie E durch v_0, m, λ und t aus. Ist die kinetische Energie erhalten? (1 Punkt)

Aufgabe 3: Kraftfeld (9 Punkte)

Betrachten Sie das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\begin{pmatrix} b_2 y + b_3 z \\ b_1 z + b_2 x \\ b_3 x + b_1 y \end{pmatrix} .$$

mit Konstanten $b_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, 2, 3$.

a) Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \vec{F}$. (1 Punkt)

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial U}{\partial x} = b_2 y + b_3 z$$

an. (1 Punkt)

c) Bestimmen Sie das Potential $U(\vec{r})$ zur Kraft $\vec{F}(\vec{r})$. (2 Punkte)

d) Betrachten Sie die Bewegung eines Massenpunkts mit Masse m für den Spezialfall $b \equiv b_1 = b_2 = -b_3 > 0$: Finden Sie alle Lösungen der Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$, bei denen sich der Massenpunkt in der Ebene $z = 0$ bewegt. Drücken Sie Ihre Lösung durch $x_0 = x(0)$ und $v_{x0} = \dot{x}(0)$ aus. (3 Punkte)

e) Betrachten Sie für diesen Spezialfall die Lösung mit Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}(0) = 0$. Welche kinetische Energie hat der Massenpunkt zu dem Zeitpunkt, zu dem er den Punkt $\vec{r} = 0$ durchläuft? (2 Punkte)

Aufgabe 4: Länge einer Bahnkurve (7 Punkte)

Die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Teilchens sei gegeben durch

$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\vec{e}_1 + R\sin(\omega t)\vec{e}_2 + v_0 t\vec{e}_3 - \frac{g}{2}t^2\vec{e}_3 \quad .$$

Dabei ist sind $R, g, \omega, v_0 > 0$ konstant.

a) Zeigen Sie, dass die Strecke $s(T)$, die das Teilchen zwischen $t = 0$ und $t = T$ zurücklegt, gegeben ist durch einen Ausdruck der Form

$$s(T) = C\int_a^b du\sqrt{1+u^2} \quad . \tag{1}$$

Drücken Sie C, a und b durch R, g, ω und v_0 aus. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int du\sqrt{1+u^2} \quad .$$

Hinweis:

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad , \quad \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad ,$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad , \quad \sinh(2x) = 2\cosh x \sinh x \quad .$$

(2 Punkte)

c) Sei nun $v_0 = gT$. Drücken Sie $s(T)$ durch R, g und ω aus und vereinfachen Sie so weit wie möglich. (2 Punkte)

Aufgabe 5: Kepler-Problem (11 Punkte)

Ein Asteroid mit Masse m umkreise die Sonne auf einer elliptischen Bahn. Die Bahnkurve ist in ebenen Polarkoordinaten r,θ durch

$$r(\theta) = \frac{l^2}{\mu\alpha(1+\varepsilon\cos\theta)}$$

gegeben, wobei μ die reduzierte Masse und l den Betrag des Drehimpulses bezeichnet. Die potentielle Energie ist $U(r) = -\alpha/r$ mit $\alpha > 0$. Die kartesischen Koordinaten sind gegeben durch $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

a) Drücken Sie μ durch m und die Sonnenmasse M aus. Entwickeln Sie μ zur ersten Ordnung in m/M. (1 Punkt)

b) Bestimmen Sie den Winkel $\theta_1 \in [0, 2\pi)$, für den der Asteroid der Sonne am nächsten ist. Bestimmen Sie den Winkel $\theta_2 \in [0, 2\pi)$, für den der Asteroid am weitesten von der Sonne entfernt ist. (2 Punkte)

c) Skizzieren Sie die Umlaufbahn des Asteroiden. Tragen Sie die Position der Sonne sowie die große und kleine Halbachse der Umlaufbahn ein. (3 Punkte)

d) Berechnen Sie die Länge a der großen Halbachse. Drücken Sie a durch μ, α, l und ε aus. (1 Punkt)

e) Berechnen Sie den Betrag v_1 der Geschwindigkeit des Asteroiden am sonnennächsten Punkt. Drücken Sie v_1 durch μ, α, l und ε aus. (1 Punkt)

f) Berechnen Sie die Länge b der kleinen Halbachse. Drücken Sie b durch μ, α, l und ε aus.
Hinweis: Bestimmen Sie den Abstand zur großen Halbachse als Funktion von θ und maximieren Sie diesen. (3 Punkte)