Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I
WS 2012/13

Prof. U. Nierste
Dr. M. Wiebusch

Lösungen zur zweiten Klausur
Korrektur 12.4.2013

Aufgabe 1: Drehungen im $\mathbb{R}^3$ (9 Punkte)

a) i) wahr, ii) falsh, iii) wahr, iv) wahr, v) wahr (Je 1 P.)

b) i) Es ist

$$1 + 2\cos\phi = \operatorname{Tr} R = \tfrac{1}{9}(4+4+1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \tfrac{\pi}{2} \quad . \quad \text{(1 P.)}$$

ii) Es ist

$$R - R^\mathsf{T} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -6 & 12 \\ 6 & 0 & -12 \\ -12 & 12 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Wähle $n_1 = 1$.

$$(R - R^\mathsf{T})\vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} - 6n_2 \quad +12n_3 &= 0 \\ 6 \quad\quad -12n_3 &= 0 \\ -12 + 12n_2 \quad\quad &= 0 \end{aligned} \quad .$$

(0.5 P. für irgendein richtiges Gleichungssystem)

Die dritte Zeile liefert $n_1 = 1$. Die zweite Zeile liefert $n_3 = 1/2$. Also ist $\vec{n} = (1, 1, 1/2)^\mathsf{T}$ (1 P.). Wegen $|\vec{n}|^2 = 9/4$ ist $\hat{\vec{n}} = (2/3, 2/3, 1/3)^\mathsf{T}$ (0.5 P.).

iii) Es ist

$$R\vec{e}_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_1 \times R\vec{e}_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad , \quad (\vec{e}_1 \times R\vec{e}_1)\cdot\hat{\vec{n}} = \frac{1}{27}(0+8+7) > 0 \quad .$$

(1 P.)

Aufgabe 2: Reibungskraft (4 Punkte)

a) Es ist

$$m\dot{v} = F_R = -m\lambda v \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = -\lambda v \quad . \quad \text{(1 P.)}$$

b) Die Lösung des Anfangswertproblems ist $v(t) = v_0 e^{-\lambda t}$. (1 P.)

c) Die in der Zeit T zurückgelegte Strecke ist

$$s(t) = \int_0^T dt\, v(t) = v_0 \int_0^T dt\, e^{-\lambda t} = \frac{v_0}{\lambda} e^{-\lambda T} \quad . \qquad (1\text{ P.})$$

d) Die kinetische Energie ist

$$E = \frac{m}{2} v(t)^2 = \frac{m}{2} v_0^2 e^{-2\lambda t} \quad . \qquad (0.5\text{ P.})$$

Sie ist nicht erhalten. (0.5 P.)

Aufgabe 3: Kraftfeld (9 Punkte)

a) Es ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = - \begin{pmatrix} \nabla_y F_z - \nabla_z F_y \\ \nabla_z F_x - \nabla_x F_z \\ \nabla_x F_y - \nabla_y F_x \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_1 - b_1 \\ b_3 - b_3 \\ b_2 - b_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (1\text{ P.})$$

b) Es ist

$$U = b_2 yx + b_3 zx + C_x(y,z) \quad ,$$

wobei C_x eine beliebige Funktion von y und z ist. (1 P.)

c) Die Gleichung für die zweite Komponente liefert

$$\begin{aligned} & b_1 z + b_2 x = \frac{\partial U}{\partial y} = b_2 x + \frac{\partial C_x}{\partial y} \\ \Rightarrow \quad & \frac{\partial C_x}{\partial y} = b_1 z \quad \Rightarrow \quad C_x = b_1 zy + C_y(z) \\ \Rightarrow \quad & U = b_2 yx + b_3 zx + b_1 zy + C_y(z) \quad . \end{aligned}$$

Dabei ist C_y eine beliebige Funktion von z. (1 P.)

Die Gleichung für die dritte Komponente liefert

$$\begin{aligned} & b_3 x + b_1 y = \frac{\partial U}{\partial z} = b_3 x + b_1 y + \frac{\partial C_y}{\partial z} \\ \Rightarrow \quad & \frac{\partial C_y}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = C \\ \Rightarrow \quad & U = b_2 yx + b_3 zx + b_1 zy + C \quad . \end{aligned}$$

Dabei ist C eine beliebige Konstante. (1 P.)

d) Die Bewegungsgleichung ist

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{b}{m}\begin{pmatrix} y-z \\ x+z \\ y-x \end{pmatrix} \quad .$$

Für $z = 0$ ist

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{b}{m}\begin{pmatrix} y \\ x \\ y-x \end{pmatrix} \quad .$$

Damit der Massenpunkt in der xy-Ebene bleibt muß die Beschleunigung in z-Richtung verschwinden. Also muß $x = y$ sein. (1 P.)

Die Bewegungsgleichung für die x-Komponente lautet nun

$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}x \quad .$$

Dies ist die Gleichung eines harmonischen Oszillators. Die allgemeinste Lösung ist

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{b/m} \quad . \qquad \text{(1 P.)}$$

Bei $t = 0$ ist $x(0) = A \equiv x_0$ und $\dot{x}(0) = B\omega \equiv v_{x0}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_{x0}}{\omega}\sin(\omega t) \quad , \quad y(t) = x(t) \quad , \quad z(t) = 0 \quad . \qquad \text{(1 P.)}$$

e) Für $v_{x0} = 0$ ist $x(t) = x_0\cos(\omega t)$. Dies verschwindet für $t = \pi/(2\omega) \equiv t_0$. Die Geschwindigkeiten bei $t = t_0$ sind

$$\dot{x}(t_0) = \dot{y}(t_0) = -x_0\omega\sin(\tfrac{\pi}{2\omega}) = -x_0\omega \quad . \qquad \text{(1 P.)}$$

Also ist

$$E(t_0) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0)) = mx_0^2\omega^2 = mx_0^2\frac{b}{m} = x_0^2 b \quad . \qquad \text{(1 P.)}$$

Aufgabe 2: Länge einer Bahnkurve (7 Punkte)

a) Es ist

$$\dot{\vec{r}}(t) = -R\omega\sin(\omega t)\vec{e}_1 + R\omega\cos(\omega t)\vec{e}_2 + v_0 - gt\vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \quad |\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{R^2\omega^2 + (v_0 - gt)^2} = R\omega\sqrt{1 + \left(\frac{v_0 - gt}{R\omega}\right)^2} \quad .$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
s(T) &= \int_0^T dt\, |\dot{\vec{r}}(t)| \\
&= R\omega \int_0^T dt \sqrt{1 + \left(\frac{v_0 - gt}{R\omega}\right)^2} \quad . \qquad \text{(0.5 P.)}
\end{aligned}
$$

Substitution $u = (v_0 - gt)/(R\omega)$, $du = -g\,dt/(R\omega)$ (1 P.) liefert

$$
-\frac{R^2\omega^2}{g} \int_{u(0)}^{u(T)} du \sqrt{1+u^2} \quad .
$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
C &= -\frac{R^2\omega^2}{g} \quad , && \text{(0.5 P.)} \\
a = u(0) &= \frac{v_0}{R\omega} \quad , && \text{(0.5 P.)} \\
b = u(T) &= \frac{v_0 - gT}{R\omega} \quad . && \text{(0.5 P.)}
\end{aligned}
$$

b) Substitution $u = \sinh\eta$, $du = d\eta \cosh\eta$ liefert

$$
\begin{aligned}
\int du \sqrt{1+u^2} &= \int d\eta\, \cosh\eta \sqrt{1+\sinh^2\eta} = \int d\eta\, \cosh^2\eta && \text{(1 P.)} \\
&= \int d\eta\, \tfrac{1}{4}(e^\eta + e^{-\eta})^2 = \int d\eta\, \tfrac{1}{4}(e^{2\eta} + 2 + e^{-2\eta}) \\
&= \tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{2}e^{2\eta} + 2\eta - \tfrac{1}{2}e^{-2\eta}] = \tfrac{1}{4}[\sinh(2\eta) + 2\eta] \\
&= \tfrac{1}{2}[\sinh\eta\cosh\eta + \eta] = \tfrac{1}{2}[u\sqrt{1+u^2} + \operatorname{arsinh} u] \quad . && \text{(1 P.)}
\end{aligned}
$$

c) Für $v_0 = gT$ ist $a = gT/(R\omega)$ und $b = 0$ (1 P.). Einsetzen liefert

$$
\begin{aligned}
s(T) &= \frac{R^2\omega^2}{2g}\left[\frac{gT}{R\omega}\sqrt{1+\left(\frac{gT}{R\omega}\right)^2} + \operatorname{arsinh}\frac{gT}{R\omega}\right] \\
&= \frac{T}{2}\sqrt{R^2\omega^2 + g^2T^2} + \frac{R^2\omega^2}{2g}\operatorname{arsinh}\frac{gT}{R\omega} \quad . && \text{(1 P.)}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: Kepler-Problem (11 Punkte)

Ein Asteroid mit Masse m umkreise die Sonne auf einer elliptischen Bahn. Die Bahnkurve ist in ebenen Polarkoordinaten r,θ durch

$$
r(\theta) = \frac{l^2}{\mu\alpha(1 + \varepsilon\cos\theta)}
$$

gegeben, wobei μ die reduzierte Masse und l den Betrag des Drehimpulses bezeichnet. Die potentielle Energie is $U(r) = -\alpha/r$ mit $\alpha > 0$. Die karthesischen Koordinaten sind gegeben durch $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

a) Es ist
$$\mu = \frac{mM}{m+M} = m\frac{1}{1+m/M} \quad . \qquad \text{(0.5 P.)}$$
Die Taylorentwicklung ist
$$\mu = m - \frac{m^2}{M} + \mathcal{O}(m^2/M^2) \quad . \qquad \text{(0.5 P.)}$$

b) Der Radius r ist am kleinsten wenn $\cos\theta$ maximal ist. Also ist $\theta_1 = \pi$. (1 P.)
Der Radius r ist am größten wenn $\cos\theta$ maximal ist. Also ist $\theta_2 = 0$. (1 P.)

c) Ausrichtung der Ellipse korrekt: (1 P.)
Position der Sonne korrekt: (1 P.)
Halbachsen korrekt: (1 P.)

d) Die Länge der großen Halbachse ist
$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}[r(\theta_1) + r(\theta_2)] \\ &= \frac{l^2}{2\mu\alpha}\left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}\right) = \frac{l^2}{\mu\alpha}\frac{1}{1-\varepsilon^2} \end{aligned} \qquad \text{(1 P.)}$$

e) Da der Drehimpuls erhalten ist gilt
$$l = \mu v_1 r(\theta_1) = \mu v_1 \cdot \frac{l^2}{\mu\alpha(1+\varepsilon)} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{\alpha}{l}(1+\varepsilon) \quad . \qquad \text{(1 P.)}$$

f) Die Entfernung zur großen Halbachse ist
$$y(\theta) = r(\theta)\sin\theta = \frac{l^2}{\mu\alpha}\frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} \quad . \qquad \text{(1 P.)}$$
Am Extremum gilt
$$\begin{aligned} 0 = \frac{dy}{d\theta} &= \frac{l^2}{\mu\alpha}\frac{\cos\theta(1+\varepsilon\cos\theta) + \varepsilon\sin^2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} \\ \Rightarrow \qquad 0 &= \cos\theta + \varepsilon(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \cos\theta + \varepsilon \\ \Rightarrow \quad \cos\theta &= -\varepsilon \quad . \end{aligned} \qquad \text{(1 P.)}$$
Die kleine Halbachse ist
$$\begin{aligned} b = y_{\max} &= \frac{l^2}{\mu\alpha}\frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} = \frac{l^2}{\mu\alpha}\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{1+\varepsilon\cos\theta} \\ &= \frac{l^2}{\mu\alpha}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon^2} = \frac{l^2}{\mu\alpha}\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad . \end{aligned} \qquad \text{(1 P.)}$$