Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. P. P. Orth

Klausur, 100 Punkte
26.02.2014, 08:00 - 10:00 Uhr, 120 min

---

1. Quickies (5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25 Punkte)
Beantworten Sie die nachfolgenden Fragen so kurz wie möglich aber verständlich.

(a) Geben Sie zwei der drei Keplerschen Gesetze an.

(b) Zeigen Sie warum der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ eine Erhaltungsgrösse ist, falls das Potential $V(|\boldsymbol{r}|)$ nur vom Betrag des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ abhängt. Nennen Sie die dieser Erhaltungsgröße zugrundeliegende Symmetrie.

(c) Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 6$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 4$ an.

(d) Berechnen Sie die Arbeit, die das Kraftfeld

$$\boldsymbol{F} = (2xy - 3)\boldsymbol{e}_x + x^2\boldsymbol{e}_y$$

auf dem direkten Weg vom Punkt $\boldsymbol{a} = (1, 0)$ zum Punkt $\boldsymbol{b} = (0, 1)$ verrichtet.

0 (e) Berechnen Sie das Verhältnis der Mittelwerte von kinetischer und potentieller Energie $E_{\text{kin}}/E_{\text{pot}}$ für einen auf einer Kreisbahn um die Erde laufenden Satelliten. Normieren Sie dabei die potentielle Energie des Satelliten so, dass $E_{\text{pot}}(r \to \infty) = 0$ gilt.

2. Bewegung entlang einer Helix (5 + 10 + 10 = 25 Punkte)
Ein Teilchen der Masse $m = \frac{19}{36}$ bewege sich reibungsfrei in dem Kraftfeld

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\left(\sqrt{2x^2 + z^2}\right)^5} \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}$$

entlang einer Helix. Der Weg des Teilchens kann durch

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(2\pi t) \\ \sqrt{2}\sin(2\pi t) \\ \sqrt{5}(1 - t) \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden, wobei der dimensionslose Parameter t das Intervall $t \in [0, 1]$ durchlaufe. Zu Beginn am Punkt $\boldsymbol{r}(0)$ sei das Teilchen in Ruhe $\boldsymbol{v}(0) = 0$. In dieser Aufgabe bestimmen Sie den Betrag der Geschwindigkeit am Punkt $\boldsymbol{r}(1)$. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor.

(a) Zeigen Sie, dass die Kraft $\boldsymbol{F}$ konservativ ist.

0 (b) Bestimmen Sie durch Integration das dazugehörige Potential $V(\boldsymbol{r})$, das im Unendlichen zu Null normiert sei $V(\boldsymbol{r} \to \infty) = 0$.

0 (c) Bestimmen Sie nun den Betrag der Geschwindigkeit $|\boldsymbol{v}(1)|$ am Punkt $\boldsymbol{r}(1)$ im Fall dass das Teilchen am Punkt $\boldsymbol{r}(0)$ in Ruhe ist, also $\boldsymbol{v}(0) = 0$ gilt.

3. Schwingungen (5 + 10 + 10 = 25 Punkte)

Eine Feder mit Federkonstante k hänge vertikal an der Decke (siehe Abb. 1, links). Befestigt man einen Körper unbekannter Masse m an ihrem unteren Ende, so liegt die neue Ruhelage im Abstand l_0 zur Ruhelage der ungedehnten Feder. Lenkt man die Masse um eine zusätzliche Strecke x_0 aus, so fängt die Masse an vertikal zu schwingen.

(a) Stellen Sie die (homogene) Bewegungsdifferentialgleichung für die Masse m auf und bestimmen Sie die Masse m sowie die Oszillationsfrequenz ω_0 als Funktion von k und l_0 unter Vernachlässigung von Reibungskräften.

(b) Es wirke nun eine zusätzliche Reibungskraft, die proportional und entgegengesetzt gerichtet zur Geschwindigkeit $\dot{x}$ der Masse ist mit Proportionalitätskoeffizient $m\gamma > 0$. Stellen Sie die (homogene) Bewegungsdifferentialgleichung für die Masse m auf und bestimmen Sie die Trajektorie $x(t)$ für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ unter der Annahme dass $\omega_0 > \gamma/2$. Diskutieren Sie den Grenzfall großer Zeiten $t \to \infty$.

(c) Betrachten Sie nun erneut den reibungsfreien Fall $\gamma = 0$ und bestimmen Sie die Bewegung der Masse unter der Wirkung einer vertikalen externen Kraft $f_0(t) = p_0\big[-\delta(t) - \delta(t - \pi/\omega_0)\big]$ für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(t < 0) = 0$. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis, d.h. geben Sie eine physikalische Erklärung für die zu beobachtende Bewegung an.

4. Schwelle (25 Punkte)

Wie groß muss die an der Achse ausgeübte horizontale Kraft $\boldsymbol{F}$ sein, um ein Rad mit der Masse m und dem Radius R über einen Block mit der Höhe h zu schieben? Eine Skizze ist in Abb. 1 (rechts) gezeigt.

Diskutieren Sie die Grenzfälle $h \to 0$ sowie $h \to R$.

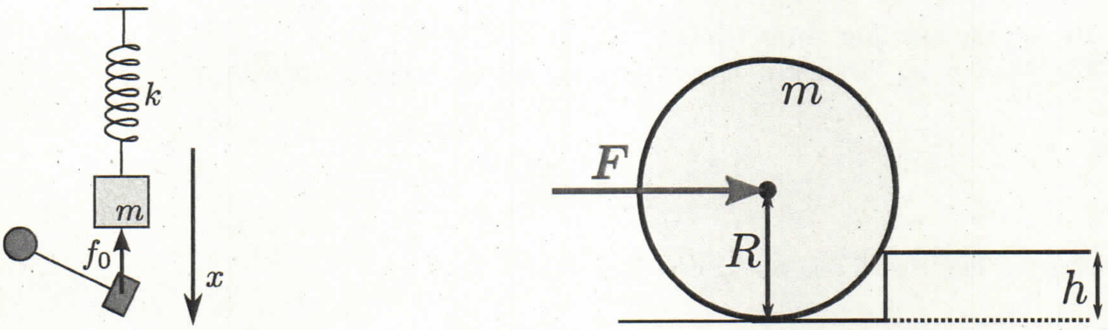

Abbildung 1: Links: Abbildung zu Aufgabe 3. Der Hammer übt die vertikale Kraft $f_0(t) = p_0\big[-\delta(t) + -\delta(t - \pi/\omega_0)\big]$ im Teil (c) der Aufgabe aus. In Teil (b) ist keine externe Kraft vorhanden. Rechts: Abbildung zu Aufgabe 4.