Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. P. P. Orth

Lösungsvorschlag Klausur, 100 Punkte
26.02.2014, 08:00 - 10:00 Uhr, 120 min

---

1. Quickies ($5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$ Punkte)

Beantworten Sie die nachfolgenden Fragen so kurz wie möglich aber verständlich.

(a) Geben Sie zwei der drei Keplerschen Gesetze an.

1. Alle Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen. Die Sonne befindet sich in einem der Ellipsenbrennpunkte.
2. Eine Linie (Fahrstrahl), die den Planeten mit der Sonne verbindet überstreicht in gleichen Zeitintervallen gleiche Flächen.
3. Das Quadrat der Umlaufzeit T eines Planeten geteilt durch die dritte Potenz der großen Halbachse a der Ellipsenbahn des Planeten ist ein und dieselbe Konstante für alle Planeten im Sonnensystem: $T^2/a^3 = \text{konst.}$.

(b) Zeigen Sie warum der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ eine Erhaltungsgrösse ist, falls das Potential $V(|\boldsymbol{r}|)$ nur vom Betrag des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ abhängt. Nennen Sie die dieser Erhaltungsgröße zugrundeliegende Symmetrie.

Es gilt

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{r} \times (\nabla V(|\boldsymbol{r}|)) = -\boldsymbol{r} \times V'(|\boldsymbol{r}|)\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = 0 \tag{1}$$

da $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = 0$. Also ist $\boldsymbol{L}$ zeitlich konstant und damit eine Erhaltungsgröße. Alle drei Komponenten des Drehimpulese sind erhalten. Die zugrundeliegende Symmetrie ist die *Rotationssymmetrie* des Potentials bezüglich Rotationen um alle drei Raumachsen, da das Potential nur vom Betrag des Vektors $\boldsymbol{r}$ abhängt, nicht aber von seiner Richtung.

(c) Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 6$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 4$ an.

Die homogene Lösung $y_h(x)$ ergibt sich aus

$$D^2 + D - 6 = 0 \Rightarrow D_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \tag{2}$$

$$\Rightarrow D_1 = 2;\ D_2 = -3\,. \tag{3}$$

zu

$$y_h(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x}\,. \tag{4}$$

Die partikuläre Lösung kann man erraten $y_p(x) = -1$. Die gesamte Lösung lautet also

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = -1 + Ae^{2x} + Be^{-3x}\,. \tag{5}$$

Die Konstanten A und B bestimmt man aus den Anfangsbedingungen zu

$$y(0) = 1 \Rightarrow -1 + A + B = 1 \Leftrightarrow A = 2 - B \tag{6}$$

$$y'(0) = 4 \Rightarrow 2A - 3B = 4 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}\Big(4 + 3B\Big)\,. \tag{7}$$

Wir erhalten also

$$2 - B = 2 + \frac{3}{2}B \Rightarrow B = 0 \tag{8}$$

$$\Rightarrow A = 2\,. \tag{9}$$

Die Lösung der Differentialgleichung mit den gegebenen Anfangsbedingungen lautet also

$$y(x) = -1 + 2e^{2x}\,. \tag{10}$$

(d) Berechnen Sie die Arbeit, die das Kraftfeld

$$\boldsymbol{F} = (2xy - 3)\boldsymbol{e}_x + x^2\boldsymbol{e}_y$$

auf dem direkten Weg vom Punkt $\boldsymbol{a} = (1,0)$ zum Punkt $\boldsymbol{b} = (0,1)$ verrichtet.
Mit der Parametrisierung

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} \tag{11}$$

mit $t \in [0,1]$ ergibt sich $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (-1,1)$ und daher

$$W = \int_{\mathcal{C}} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F} = \int_0^1 dt \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(t)] = \int_0^1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2(1-t)t - 3 \\ (1-t)^2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$= \int_0^1 \big(-2t + 2t^2 + 3 + 1 - 2t + t^2\big) = \int_0^1 dt\big(4 - 4t + 3t^2\big) \tag{13}$$

$$= 4 - 2 + 1 = 3\,. \tag{14}$$

(e) Berechnen Sie das Verhältnis der Mittelwerte von kinetischer und potentieller Energie $E_{\text{kin}}/E_{\text{pot}}$ für einen auf einer Kreisbahn um die Erde laufenden Satelliten. Normieren Sie dabei die potentielle Energie des Satelliten so, dass $E_{\text{pot}}(r \to \infty) = 0$ gilt.
Auf der Kreisbahn gilt, dass die Zentripetalbeschleunigung $r\omega^2$ gleich der Graviationsbeschleunigung GM/r^2 ist:

$$r\omega^2 = \frac{GM}{r^2} \Rightarrow r = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3}. \tag{15}$$

Hier bezeichnet $G = 6.67 \times 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2$ die Newtonsche Graviationskonstante und $M = 5.98219 \times 10^{24}$ kg die Masse der Erde. Die kinetische Energie auf einer Kreisbahn ist gegeben durch

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{m}{2}\omega^2\frac{(GM)^{2/3}}{\omega^{4/3}} = \frac{m}{2}\big(GM\big)^{2/3}\omega^{2/3}\,. \tag{16}$$

Die potentielle Energie ist gegeben durch

$$E_{\text{pot}} = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{(GM)^{1/3}}\omega^{2/3} = -(GM)^{2/3}m\omega^{2/3}\,. \tag{17}$$

Das Verhältnis von kinetischer und potentieller Energie lautet also

$$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{pot}}} = -\frac{1}{2}\,. \tag{18}$$

Die ist eine Konsequenz des Virialsatzes.

4. Bewegung entlang einer Helix (5 + 10 + 10 = 25 Punkte)

Ein Teilchen der Masse $m = \frac{19}{36}$ bewege sich reibungsfrei in dem Kraftfeld

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\left(\sqrt{2x^2 + z^2}\right)^5} \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \\ -z \end{pmatrix} \tag{19}$$

entlang einer Helix. Der Weg des Teilchens kann durch

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(2\pi t) \\ \sqrt{2}\sin(2\pi t) \\ \sqrt{5}(1-t) \end{pmatrix} \tag{20}$$

parametrisiert werden, wobei der dimensionslose Parameter t das Intervall $t \in [0, 1]$ durchlaufe. Zu Beginn am Punkt $\boldsymbol{r}(0)$ sei das Teilchen in Ruhe $\boldsymbol{v}(0) = 0$. In dieser Aufgabe bestimmen Sie den Betrag der Geschwindigkeit am Punkt $\boldsymbol{r}(1)$. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor.

(a) Zeigen Sie, dass die Kraft $\boldsymbol{F}$ konservativ ist.

Die Kraft ist konservativ wenn gilt dass $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$. Schreiben wir die Kraft als $\boldsymbol{F} = f(x, z)(-2x, 0, -z)$ mit $f(x, z) = 1/(2x^2 + z^2)^{5/2}$. Berechnen wir also

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ (\partial_z f)(-2x) - (\partial_x f)(-z) \\ 0 - 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Für die Ableitungen der Funktion $f(x, z)$ erhalten wir

$$\partial_z f = \frac{-5z}{(2x^2 + z^2)^{7/2}} \tag{22}$$

$$\partial_x f = \frac{-10x}{(2x^2 + z^2)^{7/2}}\,. \tag{23}$$

Wir erhalten also für die y-Komponente der Rotation

$$\partial_z F_x - \partial_x F_z = -(\partial_z f)2x + (\partial_x f)z = \frac{10xz}{(2x^2 + z^2)^{7/2}} - \frac{10xz}{(2x^2 + z^2)^{7/2}} = 0 \tag{24}$$

und damit

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0\,. \tag{25}$$

(b) Bestimmen Sie durch Integration das dazugehörige Potential $V(\boldsymbol{r})$, das im Unendlichen zu Null normiert sei $V(\boldsymbol{r} \to \infty) = 0$.

Man kann das zur Kraft $\boldsymbol{F}$ dazugehörige Potential $V(\boldsymbol{r})$, das $\boldsymbol{F} = -\nabla V(\boldsymbol{r})$ erfüllt auf verschiedene Arten berechnen. Man kann das Potential in einfachen Fällen auch erraten, aber hier soll eine explizite Rechnung gezeigt werden. Eine Möglichkeit ist es das folgende Wegintegral zu berechnen (das Potential ist offensichtig unabhängig von y)

$$V(\boldsymbol{r}) = -\int_{(\infty,0,\infty)}^{(x,0,z)} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F}\,. \tag{26}$$

Parametrisieren wir den Weg als

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \tag{27}$$

mit $t \in [0,1]$ so erhalten wir mit $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = -t^{-2}(x,0,z)$, das Potential

$$V(\boldsymbol{r}) = -\int_0^1 dt \frac{-1}{t^2}\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{t^5}{(2x^2+z^2)^{5/2}}\begin{pmatrix} -2x/t \\ 0 \\ -z/t \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$= \frac{1}{(2x^2+z^2)^{5/2}} \int_0^1 dt\, \frac{t^5}{t^2}\Big(-\frac{2x^2}{t} - \frac{z^2}{t}\Big) \tag{29}$$

$$= -\frac{2x^2+z^2}{(2x^2+z^2)^{5/2}} \int_0^1 dt\, t^2 = -\frac{1}{3}\frac{1}{(2x^2+z^2)^{3/2}} \tag{30}$$

(c) Bestimmen Sie nun den Betrag der Geschwindigkeit $|\boldsymbol{v}(1)|$ am Punkt $\boldsymbol{r}(1)$ im Fall dass das Teilchen am Punkt $\boldsymbol{r}(0)$ in Ruhe ist, also $\boldsymbol{v}(0) = 0$ gilt.
Wir verwenden den Energieerhaltungssatz

$$E_{\text{kin}}[\boldsymbol{r}(0)] + V[\boldsymbol{r}(0)] = E_{\text{kin}}[\boldsymbol{r}(1)] + V[\boldsymbol{r}(1)] \tag{31}$$

wobei $\boldsymbol{r}(t)$ in Gl. (20) die Helix beschreibt. Es gilt $\boldsymbol{r}(0) = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{5})$ und $\boldsymbol{r}(1) = (\sqrt{2}, 0, 0)$ und ausserdem

$$E_{\text{kin}}(\boldsymbol{r}(0)) = 0 \tag{32}$$

$$E_{\text{kin}}(\boldsymbol{r}(1)) = \frac{m}{2}|\boldsymbol{v}(1)|^2 \tag{33}$$

$$V[\boldsymbol{r}(0)] = -\frac{1}{3}\frac{1}{(4+5)^{3/2}} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{27} \tag{34}$$

$$V[\boldsymbol{r}(1)] = -\frac{1}{3}\frac{1}{4^{3/2}} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\,. \tag{35}$$

Wir erhalten also für den Betrag der Geschwindigkeit am Punkt $\boldsymbol{r}(1)$ das Ergebnis

$$|\boldsymbol{v}(1)|^2 = \frac{2}{m}\Big\{V[\boldsymbol{r}(0)] - V[\boldsymbol{r}(1)]\Big\} = \frac{2}{m}\Big\{-\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{27} - \frac{1}{8}\Big)\Big\} = \frac{2}{3}\cdot\frac{36}{19}\cdot\frac{27-8}{8\cdot 27} \tag{36}$$

$$= \frac{9}{3\cdot 27} = \frac{1}{9}\,. \tag{37}$$

und damit

$$|\boldsymbol{v}(1)| = \frac{1}{3}\,. \tag{38}$$

5. Schwingungen (5 + 10 + 10 = 25 Punkte)

Eine Feder mit Federkonstante k hänge vertikal an der Decke (siehe Abb. 1, links). Befestigt man einen Körper unbekannter Masse m an ihrem unteren Ende, so liegt die neue Ruhelage im Abstand l_0 zur Ruhelage der ungedehnten Feder. Lenkt man die Masse um eine zusätzliche Strecke x_0 aus, so fängt die Masse an vertikal zu schwingen.

(a) Stellen Sie die (homogene) Bewegungsdifferentialgleichung für die Masse m auf und bestimmen Sie die Masse m sowie die Oszillationsfrequenz ω_0 als Funktion von k und l_0 unter Vernachlässigung von Reibungskräften.
Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{39}$$

mit Resonanzfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Man bestimmt m aus der Bedingung, dass in der neuen Ruhelage sich Graviationskraft (nach unten) mg und Federkraft (nach oben) kl_0 genau aufheben, also

$$m = \frac{kl_0}{g} \tag{40}$$

und damit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}}\,. \tag{41}$$

(b) Es wirke nun eine zusätzliche Reibungskraft, die proportional und entgegengesetzt gerichtet zur Geschwindigkeit $\dot{x}$ der Masse ist mit Proportionalitätskoeffizient $m\gamma > 0$. Stellen Sie die (homogene) Bewegungsdifferentialgleichung für die Masse m auf und bestimmen Sie die Trajektorie $x(t)$ für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ unter der Annahme dass $\omega_0 > \gamma/2$. Diskutieren Sie den Grenzfall großer Zeiten $t \to \infty$.

Mit Reibungskraft lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = 0 \tag{42}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,. \tag{43}$$

Die Lösung der homogenen Bewegungsgleichung ergibt sich aus dem charakteristischen Polynom $D^2 + \gamma D + \omega_0^2 = 0$ mit Nullstellen

$$D_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\Omega \tag{44}$$

mit Frequenz $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$. Unter der Annahme dass $\omega_0 > \gamma/2$ lautet die Lösung der homogenen Bewegungsgleichung also

$$x(t) = Ae^{-\gamma t/2}\cos(\Omega t) + Be^{-\gamma t/2}\sin(\Omega t)\,. \tag{45}$$

Man bestimmt die Integrationskonstanten A und B aus den Anfangsbedingungen

$$x(0) = A = x_0 \tag{46}$$

$$\dot{x}(0) = -\frac{\gamma}{2}A + B\Omega = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0 + \frac{\gamma}{2}x_0}{\Omega}\,. \tag{47}$$

Im Grenzfall $t \to \infty$ findet man dass die Schwingung ausklingt aufgrund der Dämpfung

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0\,. \tag{48}$$

Mit dem Ansatz

$$x(t) = Ce^{-\gamma t/2}e^{i\Omega t} + De^{-\gamma t/2}e^{-i\Omega t} \tag{49}$$

bestimmt man die Konstanten zu

$$C = \frac{v_0 + x_0(\frac{\gamma}{2} + i\Omega)}{2i\Omega} \tag{50}$$

$$D = -\frac{v_0 + x_0(\frac{\gamma}{2} - i\Omega)}{2i\Omega}\,. \tag{51}$$

(c) Betrachten Sie nun erneut den reibungsfreien Fall $\gamma = 0$ und bestimmen Sie die Bewegung der Masse unter der Wirkung einer vertikalen externen Kraft $f_0(t) = p_0\big[-\delta(t) - \delta(t - \pi/\omega_0)\big]$ für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(t < 0) = 0$. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis, d.h. geben Sie eine physikalische Erklärung für die zu beobachtende Bewegung an.

Die Greenfunktion ohne Reibung lautet (ist bekannt aus der Vorlesung und muss nicht erneut hergeleitet werden)

$$G(t-s) = \theta(t-s)\frac{\sin[\omega_0(t-s)]}{\omega_0}\,. \tag{52}$$

Man bestimmt diese Greenfunktion mit dem homogenen Ansatz (für $t > 0$, da wenn sowohl $x(t) = \dot{x}(t) = 0$ für $t < 0$ dies impliziert dass $x(t) = 0$ für $t < 0$)

$$G(t) = \theta(t)\Big[A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\Big] \tag{53}$$

mit $G(0) = 0$ so dass $A = 0$ und $\frac{d}{dt}G|_{0^+} - \frac{d}{dt}G|_{0^-} = 1$ so dass $B\omega_0 = 1$ und also $B = 1/\omega_0$.

Wir bekommen die Lösung mit der allgemeinen Inhomogenität f_0 durch Faltung

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dsG(t-s)f_0(s) = \int_{-\infty}^{t} ds\frac{1}{\omega_0}\sin\big[\omega_0(t-s)\big]\Big\{-p_0\Big[\delta(s) + \delta(s - \frac{\pi}{\omega_0})\Big]\Big\} \tag{54}$$

$$= -\frac{p_0}{\omega_0}\Big\{\sin(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t - \pi)\Big\} \tag{55}$$

$$= 0\,. \tag{56}$$

Die komplette Auslöschung der Schwingung nach der zweiten δ-Funktion ist aufgrund destruktiver Interferenz der beiden durch die δ-Funktion erzeugten Schwingungen.

6. Schwelle (25 Punkte)

Wie groß muss die an der Achse ausgeübte horizontale Kraft $\boldsymbol{F}$ sein, um ein Rad mit der Masse m und dem Radius R über einen Block mit der Höhe h zu schieben? Eine Skizze ist in Abb. 1 (rechts) gezeigt.

Diskutieren Sie die Grenzfälle $h \to 0$ sowie $h \to R$.

Wir zerlegen die Kräfte in einen Anteil normal zum Kontaktpunkt mit der Schwelle und einen Anteil tangential dazu. Sobald die Kraft $\boldsymbol{F}$ groß genug ist so dass der tangentiale Anteil größer Null wird, rollt das Rad über die Schwelle. Wir wählen ein Koordinatensystem in dem die x-Achse in Richtung der Kraft $\boldsymbol{F}$ zeigt und die y-Achse entlang der Gravitationskraft $\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g}$. Der Einheitsvektor normal zur Oberfläche lautet dann

$$\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix} \tag{57}$$

und der Einheitsvektor tangential zum Oberflächenkontaktpunkt

$$\boldsymbol{e}_t = \begin{pmatrix}\sin\alpha \\ -\cos\alpha\end{pmatrix} \tag{58}$$

mit Winkeln

$$\tan\alpha = \frac{R-h}{l} \tag{59}$$

$$\cos\alpha = \frac{l}{R} \tag{60}$$

$$\sin\alpha = \frac{R-h}{R}\,, \tag{61}$$

wobei $l = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{h(2R-h)}$. Ein Vergleich der Komponenten der beiden Kräfte entlang der Tangentialrichtung $\boldsymbol{e}_2$ liefert die minimale Kraft die notwendig ist um das Rad über die Schwelle zu schieben

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{F}_g \cdot \boldsymbol{e}_2 \geq 0 \tag{62}$$

$$\Leftrightarrow |\boldsymbol{F}| \geq mg \frac{l}{R} \frac{R}{R-h} = mg \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h} \,. \tag{63}$$

In den beiden Grenzfällen erhalten wir (auch Teilpunkte geben wenn die Grenzfälle physikalisch ohne Endresultat richtig diskutiert wurden)

$$\lim_{h \to 0} F = 0 \tag{64}$$

$$\lim_{h \to R} F = \infty \,. \tag{65}$$

Man kann die Aufgabe auch durch Berechnung des Drehmoments lösen

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_g \tag{66}$$

mit $\boldsymbol{r}_1 = -R\boldsymbol{e}_t$. Die beiden Beiträge ergeben Drehmomente in verschiedene Richtungen, d.h. entlang $\boldsymbol{e}_z = (0,0,1)$ and $-\boldsymbol{e}_z$. Das Rad dreht sich über die Schwelle sobald der Beitrag der Kraft $\boldsymbol{F}$ genauso groß ist wie der der Gravitationskraft

$$|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{F}| \sin\alpha = |\boldsymbol{r}_1| mg \cos\alpha \tag{67}$$

$$\Leftrightarrow |\boldsymbol{F}| = mg \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = mg \frac{l}{R} \frac{R}{R-h} = mg \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h} \,. \tag{68}$$

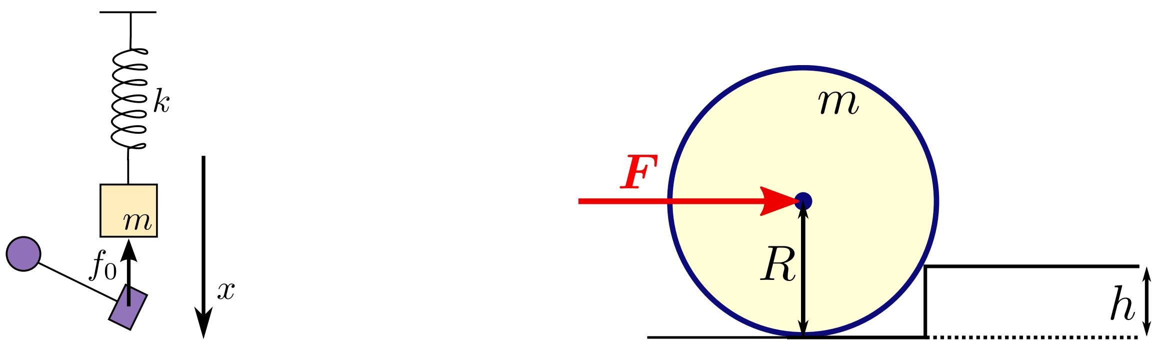

Abbildung 1: Links: Abbildung zu Aufgabe 3. Der Hammer übt die vertikale Kraft $f_0(t) = p_0\big[-\delta(t) + -\delta(t - \pi/\omega_0)\big]$ im Teil (c) der Aufgabe aus. In Teil (b) ist keine externe Kraft vorhanden. Rechts: Abbildung zu Aufgabe 4.