

Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian

Nachklausur, 100 Punkte

Dr. P. P. Orth

29.04.2014, 16:00 - 18:00 Uhr, 120 min

1. Quickies

(5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25 Punkte)

Beantworten Sie die nachfolgenden Fragen so kurz wie möglich aber verständlich.

(a) Entwickeln Sie $\tan(x)$ für kleine $x \ll 1$ bis zur Ordnung x^3 , d.h. bestimmen Sie a_0, a_1, a_2, a_3 in $\tan(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \mathcal{O}(x^4)$.

(b) Geben Sie die drei Newtonschen Gesetze an.

(c) In einer zweidimensionalen Ebene beobachte man eine Temperaturverteilung von $T(x, y) = e^x \cos(y)$. Bestimmen Sie am Punkt $(x, y) = (1, -\pi/4)$ die Richtung in der die Temperatur am stärksten ansteigt sowie den Betrag der Temperaturanstiegsrate.

(d) Bestimmen Sie die Anzahl der Bakterien $N(t)$ zum Zeitpunkt t für den folgenden Fall: die Wachstumsrate sei proportional zur Anzahl der Bakterien mit Proportionalitätskonstante a . Die Bakterienpopulation werde aber auch mit einer konstanten Rate Γ reduziert, dadurch dass Bakterien für ein externes Experiment entnommen werden. Zum Zeitpunkt t_0 sei die Anzahl der Bakterien N_0 .

Stellen Sie die Differentialgleichung für diese Situation auf, lösen Sie diese und bestimmen Sie N_0 so dass $N(t) = N_0$ für alle t .

(e) Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einer Art Halfpipe wie in Abb. 1 (links) gezeigt. Dabei gleite es reibungslos über die erhöhten halbkreisartigen Teile der Bahn, aber erfahre eine Reibungskraft $\mathbf{F}_f = -\mu mg \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ mit Reibungskoeffizienten $\mu = 1/5$ im flachen, horizontalen Teil der Bahn, der die Länge L besitze. Das Teilchen starte in Ruhe aus einer Höhe von $h = L/2$.

An welchen Punkt endet die Bewegung des Teilchens?

2. Bewegung entlang einer elliptischen Helix

(5 + 10 + 10 = 25 Punkte)

Betrachten Sie die beiden Kraftfelder

$$\text{(cons.?) } \mathbf{F}_1 = 2x \cos^2(y) \mathbf{e}_x - (x^2 + 1) \sin(2y) \mathbf{e}_y \quad (1)$$

$$\mathbf{F}_2 = y \mathbf{e}_x + 2x \mathbf{e}_y + z^{5/2} \mathbf{e}_z. \quad (2)$$

(a) Bestimmen Sie ob die Kraftfelder konservativ sind.

(b) Zu den konservativen Kraftfeldern $\mathbf{F}_j$ bestimmen Sie jeweils das Potential $\phi_j(\mathbf{r})$, dass $-\nabla \phi_j(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_j$ erfüllt. Normieren Sie das Potential immer so, dass gelte $\phi(\pi/2, \pi, 0) = 0$.

(c) Bestimmen Sie für die beiden Kraftfelder $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ die Arbeit, die das Kraftfeld auf dem Weg entlang der elliptischen Helix $\mathbf{r}(t) = \cos(t) \mathbf{e}_x + 2 \sin(t) \mathbf{e}_y + t \mathbf{e}_z$ verrichtet, wobei der dimensionslose Parameter t das Intervall $t \in [0, 2\pi]$ durchlaufe.

3. Schwingungen

(10 + 10 + 5 = 25 Punkte)

Betrachten Sie die Bewegung eines harmonischen Oszillators unter der Wirkung einer externen Kraft. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t) \quad (3)$$

mit $\omega_0 > \gamma/2 > 0$.

(a) Betrachten Sie zuerst den ungedämpften Fall $\gamma = 0$ mit der Inhomogenität

$$f(t) = \theta(t) - \theta(t - a) \quad (4)$$

wobei $a > 0$. Bestimmen Sie $x(t)$ für $t \geq 0$ unter den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(t < 0) = 0$.

(b) Betrachten Sie nun den Fall mit Dämpfung $\gamma > 0$ im unterdämpften Regime $\gamma/2 < \omega_0$. Bestimmen Sie $x(t)$ für $t > 0$ unter der externen Kraft

$$f(t) = f_1 \sin(\omega_1 t) + f_2 \sin(\omega_2 t) \quad (5)$$

mit $\omega_1 \neq \omega_2$. Die Anfangsbedingungen seien $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$.

(c) Geben Sie das Ergebnis an für den Fall, dass eine der externen Frequenzen gleich der Eigenfrequenz des Oszillators ω_0 ist: $\omega_1 = \omega_0$ und $\omega_2 > \omega_1$. Beschreiben Sie das Ergebnis, das Sie in diesen Fall für $x(t)$ erhalten.

4. Rotierende Masse am Faden

(25 Punkte)

Eine Punktmasse m sei am Ende eines masselosen Fadens befestigt (siehe Abb. 1, rechts). Die Masse rotiere reibungsfrei auf einem Tisch in dessen Mitte der Faden durch ein Loch nach unten geführt werde. Unter dem Tisch werde der Faden so gehalten, dass er stets straff gespannt ist.

Anfänglich bewege sich die Masse im Kreis mit kinetischer Energie E_0 . Dann werde der Faden langsam weiter nach unten gezogen bis der Radius des Kreises auf dem sich die Masse bewegt halbiert ist.

Wieviel Arbeit W wurde dabei verrichtet ?

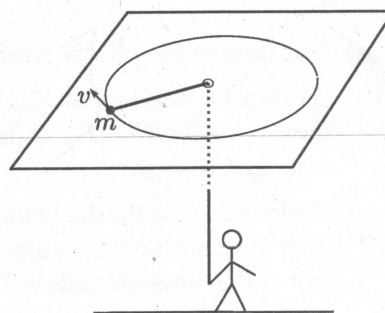
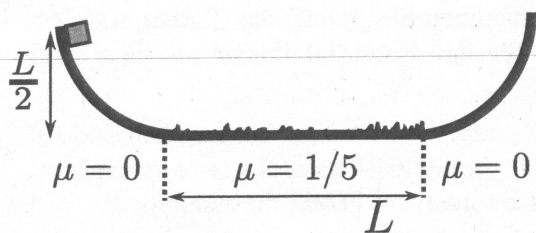


Abbildung 1: Links: Abbildung zu Aufgabe 1(e). Rechts: Abbildung zu Aufgabe 4.