Klassische Theoretische Physik I WS 2013/2014

Prof. Dr. J. Schmalian
Dr. P. P. Orth

Lösungen Nachklausur, 100 Punkte
29.04.2014, 16:00 - 18:00 Uhr, 120 min

---

1. Quickies $(5+5+5+5+5 = 25$ Punkte$)$

Beantworten Sie die nachfolgenden Fragen so kurz wie möglich aber verständlich.

(a) Entwickeln Sie $\tan(x)$ für kleine $x \ll 1$ bis zur Ordnung x^3, d.h. bestimmen Sie a_0, a_1, a_2, a_3 in $\tan(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \mathcal{O}(x^4)$.

Am leichtesten entwickelt man $\tan x$, wenn man schreibt

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2} + \dots} = \Big(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{2} - \dots\Big) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

(b) Geben Sie die drei Newtonschen Gesetze an.

1. Ein Körper auf den keine Kraft wirkt verbleibt in einer gleichförmigen Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit (diese Geschwindigkeit kann auch verschwinden, dann spricht man davon dass der Körper in Ruhe ist). *Alternativ*: es gibt Inertialsysteme.
2. $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$
3. actio = reactio: übt ein Körper 1 eine Kraft $\boldsymbol{F}_{12}$ auf einen Körper 2 aus, so wirkt ebenso eine Kraft $\boldsymbol{F}_{21}$ von Körper 2 auf Körper 1 für die gilt $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$.

(c) In einer zweidimensionalen Ebene beobachte man eine Temperaturverteilung von $T(x,y) = e^x \cos(y)$. Bestimmen Sie am Punkt $(x,y) = (1, -\pi/4)$ die Richtung in der die Temperatur am stärksten ansteigt sowie den Betrag der Temperaturanstiegsrate.

Die Richtung des stärksten Temperaturanstiegs ist durch den Gradienten des Feldes gegeben

$$(\nabla T)(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ -e^x \sin y \end{pmatrix} \tag{2}$$

Am Punkt $(x,y) = (1, -\pi/4)$ findet man

$$(\nabla T)(x,y) = \begin{pmatrix} e/\sqrt{2} \\ e/\sqrt{2} \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\,. \tag{3}$$

(d) Bestimmen Sie die Anzahl der Bakterien $N(t)$ zum Zeitpunkt t für den folgenden Fall: die Wachstumsrate sei proportional zur Anzahl der Bakterien mit Proportionalitätskonstante a. Die Bakterienpopulation werde aber auch mit einer konstanten Rate Γ reduziert, dadurch dass Bakterien für ein externes Experiment entnommen werden. Zum Zeitpunkt t_0 sei die Anzahl der Bakterien N_0.

Stellen Sie die Differentialgleichung für diese Situation auf, lösen Sie diese und bestimmen Sie N_0 so dass $N(t) = N_0$ für alle t.

Die Differentialgleichung lautet

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t) - \Gamma\,. \tag{4}$$

Die homogene Gleichung $\dot{N} - aN = 0$ besitzt die Lösung $N_h(t) = Ae^{at}$. Die inhomogene Gleichung wird gelöst durch $N_p = \Gamma/a$. Wir bestimmen schliesslich noch die Konstante A aus der Bedinung dass $N(0) = N_h(0) + N_p(0) = N_0$ und finden $A = N_0 - \Gamma/a$ so dass

$$N(t) = \left(N_0 - \frac{\Gamma}{a}\right)e^{at} + \frac{\Gamma}{a}\,. \tag{5}$$

Die Bakterienpopulation bleibt konstant für alle Zeiten falls $\dot{N} = 0$ was für $N_0 = \frac{\Gamma}{a}$ der Fall ist.

(e) Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einer Art Halfpipe wie in Abb. 1 (links) gezeigt. Dabei gleite es reibungslos über die erhöhten halbkreisartigen Teile der Bahn, aber erfahre eine Reibungskraft $\boldsymbol{F}_f = -\mu mg\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ mit Reibungskoeffizienten $\mu = 1/5$ im flachen, horizontalen Teil der Bahn, der die Länge L besitze. Das Teilchen starte in Ruhe aus einer Höhe von $h = L/2$.

An welchen Punkt endet die Bewegung des Teilchens ?

Die Geschwindigkeit v_0 mit der das Teilchen auf den flachen Teil der Halfpipe trifft lautet

$$\frac{m}{2}v_0 = mg\frac{L}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{gL}\,. \tag{6}$$

Die Bewegungsgleichung im horizontalen Teil der Halfpipe lautet

$$\ddot{x} = -\mu g \Rightarrow \dot{x}(t) = -\mu g t + v_0 \tag{7}$$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2 + x_0 \tag{8}$$

mit $x_0 = 0$ am linken Ende der horizontalen Rampe. Das Teilchen stoppt also nach der Zeit

$$\dot{x}(t_1) = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_0}{\mu g} \tag{9}$$

und hat bis dahin eine Strecke

$$x(t_1) = \frac{v_0^2}{\mu g} - \frac{1}{2}\mu g\frac{v_0^2}{(\mu g)^2} = \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{L}{2\mu} = \frac{5}{2}L\,, \tag{10}$$

zurückgelegt. Das Teilchen bleibt also genau in der Mitte des horizontalen Stücks liegen.

4. Bewegung entlang einer elliptischen Helix $(5 + 10 + 10 = 25$ Punkte$)$

Betrachten Sie die beiden Kraftfelder

$$\boldsymbol{F}_1 = 2x\cos^2(y)\boldsymbol{e}_x - (x^2+1)\sin(2y)\boldsymbol{e}_y \tag{11}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = y\boldsymbol{e}_x + 2x\boldsymbol{e}_y + z^{5/2}\boldsymbol{e}_z\,. \tag{12}$$

(a) Bestimmen Sie ob die Kraftfelder konservativ sind.

Um zu bestimmen, ob $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ konservativ sind, berechnen wir

$$\nabla \times \boldsymbol{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4x\cos(y)\sin(y) - 2x\sin(2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

wobei wir das Additionstheorem $\sin(2y) = 2\cos(y)\sin(y)$ verwendet haben. Das Kraftfeld $\boldsymbol{F}_1$ ist also konservativ.

Für $\boldsymbol{f}_2$ erhalten wir

$$\nabla \times \boldsymbol{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{14}$$

Das Kraftfeld $\boldsymbol{F}_2$ ist also nicht konservativ.

(b) Zu den konservativen Kraftfeldern $\boldsymbol{F}_j$ bestimmen Sie jeweils das Potential $\phi_j(\boldsymbol{r})$, dass $-\nabla\phi_j(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}_j$ erfüllt. Normieren Sie das Potential immer so, dass gelte $\phi(\pi/2, \pi, 0) = 0$.

Zuerst beobachten wir, dass da $\boldsymbol{F}_1$ unabhängig von z ist, auch das Potential ϕ,das $-\nabla\phi = \boldsymbol{F}_1$ erfüllt, unabhängig von z sein wird. Wir bestimmen das Potential $\phi(x, y)$ indem wir erst unbestimmt nach x integrieren

$$\phi(x, y, z) = -\int dx (\boldsymbol{F}_1)_x = -x^2 \cos^2(y) + f(y) , \tag{15}$$

wobei $f(y)$ eine Funktion der Variablen y ist. Wir bestimmen $f(y)$ indem wir verwenden dass

$$\partial_y \phi = -(\boldsymbol{F}_1)_y \tag{16}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 \cos(y)\sin(y) + \partial_y f(y) = (x^2 + 1)\sin(2y) \tag{17}$$
$$\Leftrightarrow -\sin(2y) = -\partial_y f(y) \tag{18}$$
$$\Rightarrow f(y) = -\frac{1}{2}\cos(2y) + f_0 , \tag{19}$$

wobei f_0 eine Konstante ist. Wir erhalten also

$$\phi(x, y) = -x^2 \cos^2(y) - \frac{1}{2}\cos(2y) + f_0 . \tag{20}$$

Wir bestimmen die Konstante aus $\phi(\pi/2, \pi, 0) = 0$ zu

$$-\frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2} + f_0 = 0 \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{4} . \tag{21}$$

Das Potential lautet also

$$\phi(x, y) = -x^2 \cos^2(y) - \frac{1}{2}\cos(2y) + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{4} . \tag{22}$$

(c) Bestimmen Sie für die beiden Kraftfelder $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ die Arbeit, die das Kraftfeld auf dem Weg entlang der elliptischen Helix $\boldsymbol{r}(t) = \cos(t)\boldsymbol{e}_x + 2\sin(t)\boldsymbol{e}_y + t\boldsymbol{e}_z$ verrichtet, wobei der dimensionslose Parameter t das Intervall $t \in [0, 2\pi]$ durchlaufe.

Für das Kraftfeld $\boldsymbol{F}_1$ können wir die Arbeit W_1 entlang des Weges zwischen den Endpunkten $\boldsymbol{r}(0) = (1, 0, 0)$ und $\boldsymbol{r}(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$ am einfachsten mit Hilfe des in (b) ausgerechneten Potentials bestimmen

$$W_1 = \phi[\boldsymbol{r}(2\pi)] - \phi[\boldsymbol{r}(0)] = 0 . \tag{23}$$

Für das Kraftfeld $\boldsymbol{F}_2$ integrieren wir entlang des Weges $\boldsymbol{r}(t)$. Der Tangentenvektor lautet

$$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

und somit die Arbeit

$$W_2 = \int_0^{2\pi} dt \dot{\boldsymbol{r}} \cdot F[\boldsymbol{r}(t)] = \int_0^{2\pi} dt \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\cos t \\ t^{5/2} \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$= \int_0^{2\pi} dt \Big(-2\sin^2(t) + 4\cos^2(t) + t^{5/2} \Big) = 2\pi + \frac{2}{7}(2\pi)^{7/2} \,, \tag{26}$$

wobei wir verwendet haben dass $\int_0^{2\pi} dt \sin^2(t) = \int_0^{2\pi} dt \cos^2(t) = \pi$.

5. Schwingungen (10 + 10 + 5 = 25 Punkte)

Betrachten Sie die Bewegung eines harmonischen Oszillators unter der Wirkung einer externen Kraft. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t) \tag{27}$$

mit $\omega_0 > \gamma/2 > 0$.

(a) Betrachten Sie zuerst den ungedämpften Fall $\gamma = 0$ mit der Inhomogenität

$$f(t) = \theta(t) - \theta(t-a) \tag{28}$$

wobei $a > 0$. Bestimmen Sie $x(t)$ für $t \geq 0$ unter den Anfangsbediungungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(t < 0) = 0$.

Die Green Funktion für den ungedämpften harmonischen Oszillator lautet (siehe Vorlesung und etliche Übungsaufgaben)

$$G(t) = \theta(t) \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \,. \tag{29}$$

Die Schwingung setzt sich aus der homogenen Lösung

$$x_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \tag{30}$$

und er partikulären Lösung

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds G(t-s) f(s) \tag{31}$$

zusammen zu

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \,. \tag{32}$$

Die Integrationskonstanten der homogenen Lösung werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Für die partikuläre Lösung erhalten wir

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds \theta(t-s) \frac{\sin[\omega_0(t-s)]}{\omega_0} \Big[\theta(s) - \theta(s-a) \Big] \tag{33}$$

$$= \theta(t) \int_0^t ds \frac{\sin[\omega_0(t-s)]}{\omega_0} - \theta(t-a) \int_a^t ds \frac{\sin[\omega_0(t-s)]}{\omega_0} \tag{34}$$

$$= \theta(t) \frac{\cos[\omega_0(s-t)]}{\omega_0^2} \Big|_0^t - \theta(t-a) \frac{\cos[\omega_0(s-t)]}{\omega_0^2} \Big|_a^t \tag{35}$$

$$= \theta(t) \frac{1-\cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2} - \theta(t-a) \frac{1-\cos[\omega_0(a-t)]}{\omega_0^2} \,. \tag{36}$$

Wir bestimmen die Integrationskonstanten A und B aus $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ zu $A = 0$ und $B = 0$, so dass die Lösung lautet

$$x(t) = x_p(t) = \theta(t) \frac{1-\cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2} - \theta(t-a) \frac{1-\cos[\omega_0(a-t)]}{\omega_0^2} \,. \tag{37}$$

(b) Betrachten Sie nun den Fall mit Dämpfung $\gamma > 0$ im unterdämpften Regime $\gamma/2 < \omega_0$. Bestimmen Sie $x(t)$ für $t > 0$ unter der externen Kraft

$$f(t) = f_1 \sin(\omega_1 t) + f_2 \sin(\omega_2 t) \tag{38}$$

mit $\omega_1 \neq \omega_2$. Die Anfangsbedingungen seien $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$.
Die homogene Lösung des gedämpften Oszillators im Regime $\gamma/2 < \omega_0$ lautet

$$x_h(t) = e^{-\gamma t/2}\Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big) \tag{39}$$

mit $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$. Dies folgt aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms $D^2 + \gamma D + \omega_0^2 = 0$.
Die partikuläre Lösung ist eine Überlagerung von zwei Schwingungen, eine mit Frequenz ω_1 und eine mit Frequenz ω_2 (Superpositionsprinzip). Wir lösen die inhomogene Gleichung für eine externe Kraft $f_j e^{i\omega_j t}$:

$$\ddot{z}_j + \gamma \dot{z}_j + \omega_0^2 z_j = f_j e^{i\omega_j t} \tag{40}$$

und nehmen dann den Imaginärteil der Lösung um das Ergebnis für die externe Kraft $f_j \sin(\omega_j t)$ zu erhalten, d.h. $x_{p,j}(t) = \mathrm{Im} z_j(t)$.
Wir verwenden den Ansatz $z_j(t) = A_j f_j e^{i\omega_j t}$ mit komplexem $A \in \mathbb{C}$. Einsetzen ergibt

$$\Big(-Af_j\omega_j^2 + iAf_j\omega_j\gamma + Af_j\omega_0^2\Big) = f_j e^{i\omega_j t} \tag{41}$$

und damit die Amplitude

$$A_j = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_j^2 + i\gamma\omega_j} = \frac{\omega_0^2 - \omega_j^2}{(\omega_0^2 - \omega_j^2)^2 + \gamma^2\omega_j^2} - i\frac{\gamma\omega_j}{(\omega_0^2 - \omega_j^2)^2 + \gamma^2\omega_j^2}\,. \tag{42}$$

Nehmen wir den Imaginärteil des Ausdrucks, so erhalten wir also

$$x_{p,j}(t) = \mathrm{Im} z_j(t) = -\frac{f_j\gamma\omega_j\cos(\omega_j t)}{(\omega_0^2 - \omega_j^2)^2 + \gamma^2\omega_j^2} + \frac{f_j(\omega_0^2 - \omega_j^2)\sin(\omega_j t)}{(\omega_0^2 - \omega_j^2)^2 + \gamma^2\omega_j^2}\,. \tag{43}$$

Die Lösung in der Gegenwart beider Kräfte und für allgemeine Anfangsbedinungen lautet also

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{p,1}(t) + x_{p,2}(t) + x_h(t) \qquad (44)\\ &= e^{-\gamma t/2}\Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big) + \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{-f_j\gamma\omega_j\cos(\omega_j t)}{(\omega_0^2 - \omega_j^2)^2 + \gamma^2\omega_j^2} + \frac{f_j(\omega_0^2 - \omega_j^2)\sin(\omega_j t)}{(\omega_0^2 - \omega_j^2)^2 + \gamma^2\omega_j^2}\right]\\ &= e^{-\gamma t/2}\Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big) \qquad (45)\\ &\qquad + \sum_{j=1}^{2}\frac{f_j(\omega_0^2 - \omega_j^2)}{(\omega_0^2 - \omega_j^2)^2 + \gamma^2\omega_j^2}\left[\sin(\omega_j t) - \frac{\gamma\omega_j}{\omega_0^2 - \omega_j^2}\cos(\omega_j t)\right]. \end{aligned}$$

Wir bestimmen die Konstanten A und B aus den Anfangsbedingunden $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ und erhalten

$$A = \gamma\sum_{j=1}^{2}\frac{f_j\omega_j}{(\omega_0^2 - \omega_j^2)^2 + \gamma^2\omega_j^2} \tag{46}$$

$$B = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{\gamma}{2}A - \sum_{j=1}^{2}\frac{f_j\omega_j(\omega_0^2 - \omega_j^2)}{(\omega_0^2 - \omega_j^2)^2 + \gamma^2\omega_j^2}\right). \tag{47}$$

(c) Geben Sie das Ergebnis an für den Fall, dass eine der externen Frequenzen gleich der Eigenfrequenz des Oszillators ω_0 ist: $\omega_1 = \omega_0$ und $\omega_2 > \omega_1$. Beschreiben Sie das Ergebnis, das Sie in diesen Fall für $x(t)$ erhalten.

Im Fall dass eine der beiden anregenden Frequenzen ω_j gleich der Eigenfrequenz des Oszillators ω_0 ist (Resonanzfall), wird die Amplitude dieser erzwungenen Schwingung viel größer sein als die der Schwingung mit Frequenz $\omega_2 > \omega_1$. Nach dem Einschwingvorgang $\gamma t \gg 1$ ist auch die homogene Lösung zu vernachlässigen und man findet

$$x(t) \approx -\frac{f_1}{\gamma\omega_j}\cos(\omega_1 t) \tag{48}$$

für $\gamma t \gg 1$. Der Oszillator schwingt also mit Frequenz ω_1, Amplitude $\frac{f_1}{\gamma\omega_0}$ und um π phasenverschoben zur anregenden Kraft $f_1 \sin(\omega_1 t)$.

6. Rotierende Masse am Faden (25 Punkte)

Eine Punktmasse m sei am Ende eines masselosen Faden befestigt (siehe Abb. 1, rechts). Die Masse rotiere reibungsfrei auf einem Tisch in dessen Mitte der Faden durch ein Loch nach unten geführt werde. Unter dem Tisch werde der Faden so gehalten, dass er stets straff gespannt ist.

Anfänglich bewege sich die Masse im Kreis mit kinetischer Energie E_0. Dann werde der Faden langsam weiter nach unten gezogen bis der Radius des Kreises auf dem sich die Masse bewegt halbiert ist.

Wieviel Arbeit W wurde dabei verrichtet ?

Die Kraft wirkt radial. Der Drehimpuls $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}$ der Masse ist also erhalten, da das Drehmoment $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0$ wegen $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = 0$. Der Anfängliche Radius sei R, die kinetische Energie $E_0 = \frac{m}{2}v_0^2$ und der Betrag des Drehimpulses $L = mv_0R$. Wir können daraus die Geschwindigkeit v_1 des Teilchens für den halbierten Radius ableiten zu $v_1 = 2L/mR = 2v_0$. Die kinetische Energie am Ende lautet also

$$E_1 = \frac{m}{2}v_1^2 = 4E_0 \tag{49}$$

und die geleistete Arbeit

$$W = E_1 - E_0 = 3E_0\,. \tag{50}$$

Alternativ kann man die Arbeit durch Integration bestimmen mit der Kraft $F = \frac{mv^2}{r} = \frac{L^2}{mr^3}$, wobei L konstant ist entlang des Weges. Wir erhalten dann

$$W = -\int_R^{R/2} dr F(r) = -\frac{L^2}{m}\int_R^{R/2}\frac{dr}{r^3} = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{4}{R^2} - \frac{1}{R^2}\right) = \frac{3L^2}{2mR^2} = 3E_0 \tag{51}$$

da $E_0 = \frac{m}{2}v^2 = \frac{L^2}{2mR^2}$.

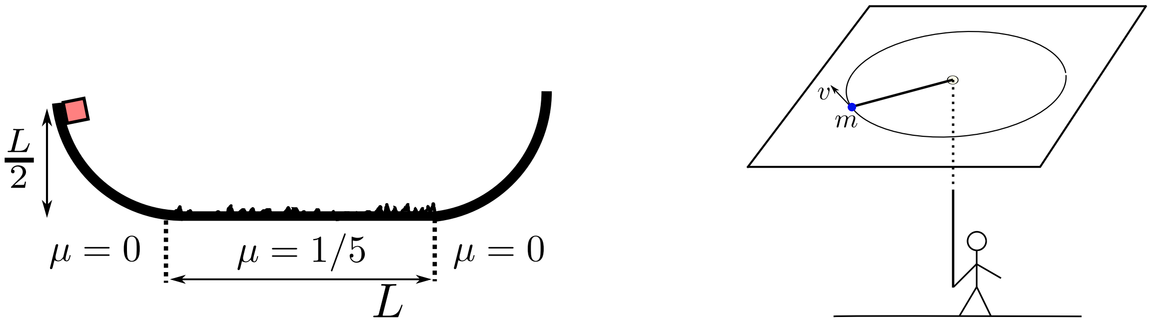

Abbildung 1: Links: Abbildung zu Aufgabe 1(e). Rechts: Abbildung zu Aufgabe 4.