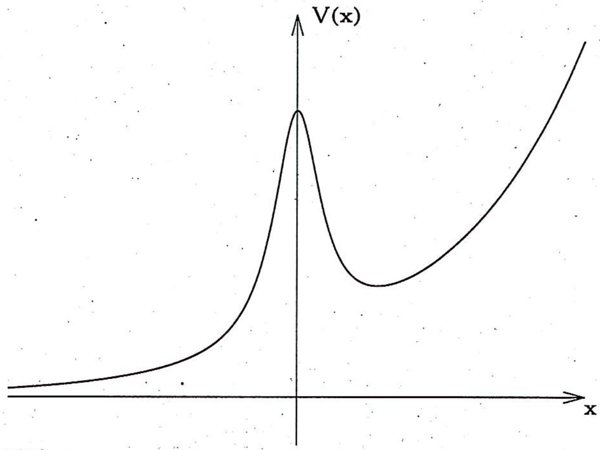
1. Aufwärmübung (1,5 + 2 + 2,5 + 2 + 2 + 2 = 12 Punkte)

In den folgenden Aufgaben ist $\boldsymbol{r} = (x, y, z)^\mathsf{T}$ und $r = |\boldsymbol{r}|$. Die einzelnen Unteraufgaben sind unabhängig voneinander zu lösen.

(a) Fügen Sie zur nebenstehenden Skizze eines Potenzials jeweils eine Skizze eines gebundenen, ungebundenen und physikalisch nicht erlaubten Zustandes hinzu (Energie und Aufenthaltsbereich der Zustände).



(b) Berechnen Sie die Rotation des folgenden Kraftfeldes. Ist das Feld konservativ? Wenn ja, geben Sie ein entsprechendes Potenzial an.

$$\boldsymbol{F} = (yz, xz, xy)^\mathsf{T}$$

(c) Berechnen Sie für $\boldsymbol{F} = (-y, x, 0)^\mathsf{T}$ die geleistete Arbeit entlang eines Viertelkreises in der xy-Ebene um den Ursprung von $(1, 0, 0)^\mathsf{T}$ nach $(0, 1, 0)^\mathsf{T}$.

(d) Welche Kraft gehört zum folgenden Potenzial?

$$V(\boldsymbol{r}) = \alpha r$$

(e) Gegeben sei der lineare Differentialoperator $D_t^{(n)}$. Welche Differentialgleichung erfüllt die Green'sche Funktion $G(t, t')$ des Differentialoperators? Gegeben sei die DGL

$$D_t^{(n)} x(t) = f(t).$$

Drücken Sie den allgemeinen Ausdruck für eine partikuläre Lösung $x(t)$ durch $G(t, t')$ aus.

(f) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte (Konventionen siehe Aufgabe 3) von

$$g(t) = \Theta(t) e^{-\gamma t},\ \gamma > 0\,.$$

2. Gekoppelte Massepunkte (2 + 4 + 2 + 4 = 12 Punkte)

Wir betrachten zwei Massepunkte, die eine anziehende Kraft $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} = -k\,(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$, $k > 0$ aufeinander ausüben. Wir wollen nun die Relativbewegung $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ der beiden Teilchen betrachten.

(a) Was kann hier über Energie und Drehimpuls allgemein ausgesagt werden?

(b) Betrachten Sie ausschließlich die Relativbewegung der beiden Massepunkte (Sie dürfen annehmen, dass die Relativbewegung durch ein Teilchen mit reduzierter Masse μ beschrieben wird). Die Bewegung finde in der xy-Ebene statt, also $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_\rho$. Drücken Sie Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}$ und den Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ in Zylinderkoordinaten aus und berechnen Sie die Energie E der Relativbewegung. Bringen Sie die Energie auf die Form

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad \text{mit} \quad V_{\text{eff}} = \frac{\gamma}{r^2} + \alpha r^2 \quad \text{und} \quad \alpha, \gamma > 0. \tag{1}$$

Drücken Sie α und γ durch L, μ und k aus, wobei μ die reduzierte Masse ist.

(c) Skizzieren Sie das effektive Potenzial V_{eff}. Tragen Sie die Energie $E > \sqrt{4\alpha\gamma} = \min(V_{\text{eff}})$ in ihre Skizze ein und markieren Sie die Umkehrpunkte eines Massepunktes mit Energie E.

(d) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei $r(0) = r_0 = \sqrt{E/2\alpha}$. Nutzen Sie Gleichung (1) und berechnen Sie $r(t)$ mittels Separation der Variablen. *Hinweis:* Die Substitution $u = r^2$ erweist sich als hilfreich. Außerdem gilt $\int \frac{du}{\sqrt{c+bu-au^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{2au-b}{\sqrt{b^2+4ac}}$.

3. Harmonischer Oszillator

(3 + 2 + 1 + 3 + 3 = 12 Punkte)

Wir betrachten die erzwungene Schwingung mit Reibung,

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad \text{mit} \quad 0 < \gamma < \omega_0 \,. \tag{2}$$

Diese Gleichung lässt sich mittels der Fourier-Transformation formal lösen. Wir drücken $f(t)$ und $x(t)$ durch ihre Fourier-Transformierten $\tilde{f}(\omega)$ und $\tilde{x}(\omega)$ wie folgt aus:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t}\tilde{x}(\omega) \quad \text{und} \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t}\tilde{f}(\omega) \,. \tag{3}$$

(a) Zuerst betrachten wir den homogenen Fall mit $f(t) = 0$. Setzen Sie zunächst $x(t)$ in Gleichung (2) ein.

   (i) Leiten Sie ω in Abhängigkeit von γ und ω_0 her. Sie erhalten zwei Lösungen $\omega_1(\gamma, \omega_0)$ und $\omega_2(\gamma, \omega_0)$.

   (ii) Die homogene Lösung im Fourier-Raum können Sie ausdrücken durch

$$\tilde{x}(\omega) = A\delta(\omega - \omega_1) + B\delta(\omega - \omega_2) \,. \tag{4}$$

   Begründen Sie diesen Schritt und berechnen Sie die homogene Lösung $x(t)$ mittels der Fourier-Transformation.

(b) Nun betrachten wir den partikulären Fall. Setzen Sie $x(t)$ und $f(t)$ in Gleichung (2) ein (wie zuvor!).

   (i) Lösen Sie die Gleichung nach $\tilde{x}(\omega)$ auf.

   (ii) Berechnen Sie $\tilde{f}(\omega)$ für die antreibende Kraft $f(t) = f_0 e^{i(\lambda t + \phi_0)}$.

   (iii) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung $x(t)$ für die angegebene Kraft.

4. Stoßexperiment

(2 + 2 + 2 + 4 + 2 = 12 Punkte)

Wir betrachten zwei Teilchen mit gleicher Masse m, die im Laborsystem mit Impuls $\boldsymbol{p}_1 = (p_1, 0)^\mathsf{T}$ und Impuls $\boldsymbol{p}_2 = (p_2, 0)^\mathsf{T}$ zusammenstoßen. Am Anfang befindet sich das Teilchen 1 links des Teilchens 2 und die beiden Teilchen fliegen aufeinander zu.

Der Stoß erfolge inelastisch mit dem Energieverlust U und nicht zentral. Da der Stoß nicht zentral ist, werden die Teilchen im Schwerpunktsystem (CMS) jeweils um einen Winkel α abgelenkt.

Wir bezeichnen die Impulse im Laborsystem vor dem Stoß mit $\boldsymbol{p}_i$, nach dem Stoß mit $\boldsymbol{p}_i'$ und entsprechend im CMS mit $\boldsymbol{q}_i$ und $\boldsymbol{q}_i'$ $(i = 1, 2)$. Die Beträge bezeichnen wir wie üblich mit q_i und q_i'.

(a) Skizzieren Sie den Stoß im Labor- und im Schwerpunktsystem.

(b) Stellen Sie die Gleichungen für Impuls- und Energieerhaltung im CMS auf. Berechnen Sie q_1' und drücken Sie es in Abhängigkeit von q_1, U und m aus

(c) Geben Sie die Impulse $\boldsymbol{q}_i$ und $\boldsymbol{q}_i'$ an.

(d) Transformieren Sie zurück ins Laborsystem: Berechnen Sie q_1' in Abhängigkeit von p_1, p_2, m und U. Berechnen Sie dann die Impulse $\boldsymbol{p}_i'$ in Abhängigkeit von p_1, p_2, α, m und U.

(e) Welcher Zusammenhang zwischen p_1, p_2, m und U muss bestehen, damit die Teilchen im Laborsystem unter dem Winkel $\pi/2$ auseinander fliegen? Was muss insbesondere für elastische Stöße gelten, damit dies passiert?