KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK www.tfp.kit.edu

Lösung – Hauptklausur 1 – Klassische Theoretische Physik I – WS 15/16

Prof. Dr. G. Schön
Sebastian Zanker, Daniel Mendler

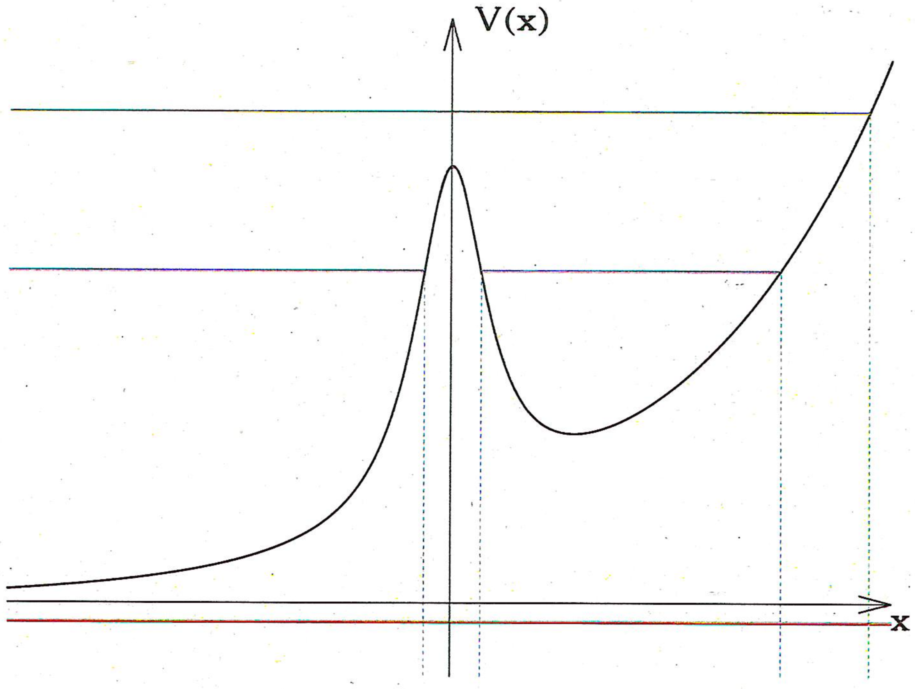
48 Punkte
Karlsruhe, 16.02.2016

---

1. Aufwärmübung

(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12 Punkte)

(a) Siehe Skizze



(b) Wir zeigen für die erste Komponente

$$[\nabla \times \boldsymbol{F}]_1 = \partial_y F_z - \partial_z F_y = x - x = 0 \tag{1}$$

Insgesamt gilt $\nabla \times \boldsymbol{F} = (0,0,0)^\intercal$. Die Kraft ist konservativ mit Potenzial

$$V = -xyz \tag{2}$$

Falls jemand direkt das Potenzial sieht und dann argumentiert, dass die Rotation verschwindet ist das auch in Ordnung.

(c) Wegparametrisierung:

$$\boldsymbol{r}(\phi) = \boldsymbol{e}_r \Rightarrow d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_\phi \, d\phi \tag{3}$$

$$W = \int_\gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{\pi/2} (-\sin\phi, \cos\phi, 0)^\intercal \cdot (-\sin\phi, \cos\phi, 0)^\intercal \, d\phi = \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

(d)

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -\alpha \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{5}$$

(e) Für die Green'sche Funktion gilt

$$D_t^{(n)} G(t,t') = \delta(t-t'). \tag{6}$$

Eine partikuläre Lösung können wir schreiben als

$$x(t) = \int G(t,t') f(t') dt' \tag{7}$$

(f)

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t) e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\gamma + i\omega} \tag{8}$$

2. Harmonische Planetenbewegung (2 + 4 + 2 + 4 = 12 Punkte)

(a) Für die Relativkoordinate handelt es sich um eine konservative Zentralkraft mit Potenzial $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$. Da außerdem keine äußeren Kräfte wirken gilt

- die Gesamtenergie ist erhalten
- die Energie von Schwerpunkt und relativ Koordinate sind separat erhalten
- Der Drehimpuls ist erhalten

(b) Für die Geschwindigkeit gilt

$$\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{r}_\rho \Rightarrow \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_\rho + r\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi \tag{9}$$

und damit für den Drehimpuls

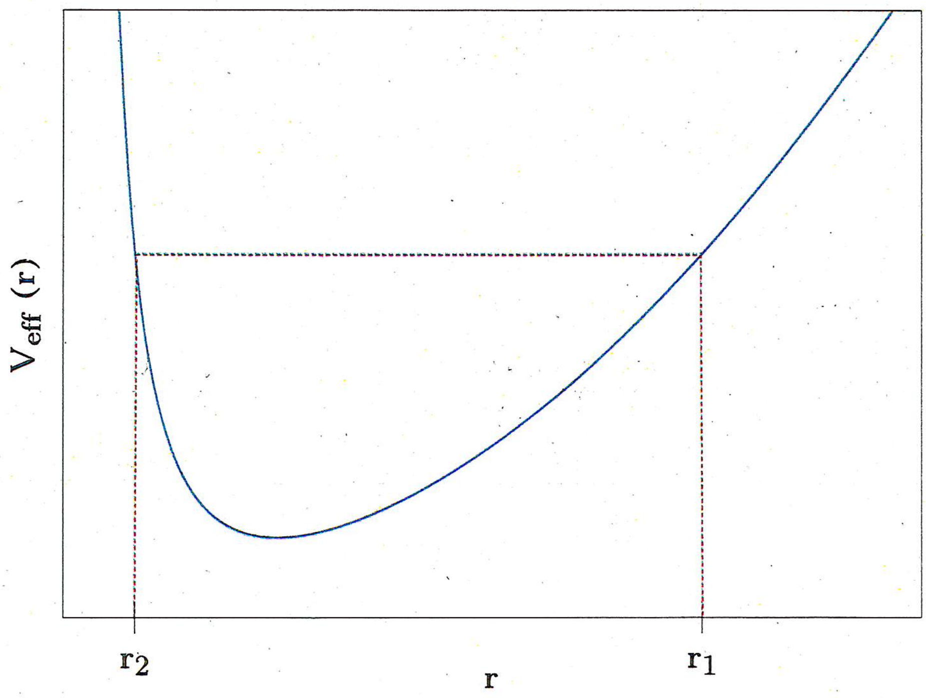
$$\boldsymbol{L} = L\,\boldsymbol{e}_z = \mu r^2 \dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_z \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{\mu r^2} \tag{10}$$

Die Energie ist

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\phi}^2 + V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{2}r^2 \tag{11}$$

Damit finden wir $\gamma = \frac{L^2}{2\mu}$ und $\alpha = k/2$.

(c) Siehe Skizze



(d) Stellen wir die Energie nach der Geschwindigkeit um finden wir

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)} \tag{12}$$

Separation der Variablen liefert

$$\frac{dr}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}} = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\, dt. \tag{13}$$

Wir integrieren

$$\int_{r^*}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(r')}} = \int_{r^*}^{r} \frac{r'\, dr'}{\sqrt{Er'^2 - \gamma - \alpha r'^4}} = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\, t. \tag{14}$$

Wir substituieren $u = r'^2 \Rightarrow du = 2r'dr'$

$$\frac{1}{2}\int_{u^*}^{u} \frac{du'}{\sqrt{Eu' - \gamma - \alpha u'^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left[\arcsin\frac{2\alpha u - E}{\sqrt{E^2 - 4\alpha\gamma}} - \arcsin\frac{2\alpha u^* - E}{\sqrt{E^2 - 4\alpha\gamma}}\right] \tag{15}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \arcsin\frac{2\alpha r^2 - E}{\sqrt{E^2 - 4\alpha\gamma}} = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\, t \tag{16}$$

Dies lässt sich nach $r(t)$ umstellen

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{2\alpha}\left[\sqrt{E^2 - 4\alpha\gamma}\,\sin\left(2\sqrt{\frac{2\alpha}{mu}}\, t\right) + E\right]} \tag{17}$$

3. Harmonischer Oszillator (2 + 4 + 3 + 3 = 12 Punkte)

$$-\omega^2\tilde{x}(\omega) + 2i\gamma\omega\tilde{x}(\omega) + \omega_0^2\tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \tag{18}$$

(a) Homogener Fall:

(i) Es sei $\tilde{x}(\omega) \neq 0$, dann sind die beiden Lösungen für $\omega_{1,2}$:

$$-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2 = 0 \Longrightarrow \omega_{1,2} = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{19}$$

(ii) Wir drücken die homogene Lösung im Fourier-Raum aus durch

$$\tilde{x}(\omega) = A\delta(\omega - \omega_1) + B\delta(\omega - \omega_2)\,, \tag{20}$$

da durch die Delta-Funktionen die erlaubten Frequenzen ω festgelegt werden. Rücktransformation:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\omega t}\left[A\delta(\omega - \omega_1) + B\delta(\omega - \omega_2)\right] \tag{21}$$

$$= \frac{A}{2\pi}e^{i\omega_1} + \frac{B}{2\pi}e^{i\omega_2} \tag{22}$$

(b) Partikulärer Fall:

(i)

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2} \tag{23}$$

(ii) Wir verwenden die Fourier-Rücktransformation:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} f(t) = f_0 e^{i\phi_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i(\lambda-\omega)t} = 2\pi f_0 e^{i\phi_0} \delta(\lambda - \omega) \tag{24}$$

(iii) Einsetzen in die partikuläre Lösung liefert:

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{2\pi f_0 e^{i\phi_0} \delta(\lambda - \omega)}{-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2} \tag{25}$$

Fouriertransformation:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \frac{2\pi f_0 e^{i\phi_0} \delta(\lambda - \omega)}{-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2} \tag{26}$$

$$= \frac{f_0 e^{i(\lambda t + \phi_0)}}{-\lambda^2 + 2i\gamma\lambda + \omega_0^2} \tag{27}$$

4. Stoßexperiment (2 + 2 + 2 + 4 + 2 = 12 Punkte)

(a)

```
                 p1'                                          q1'
                 ^                                            ^
                /                                            /
               /                                            /
              /                                            /
   p1        /       p2                       q1          / a          -q1
   --------> <---------                       --------> <---------
             \                                        a /
              \                                        /
               \                                      /
                \                                    /
                 v                                  v
                 p2'                               -q1'
```

(b) Impulserhaltung im CMS:

$$q_1 = -q_2\,, \quad q_1' = -q_2' \tag{28}$$

Energieerhaltung im CMS:

$$\frac{q_1^2 + q_2^2}{2m} = \frac{(q_1')^2 + (q_2')^2}{2m} + U \tag{29}$$

$$q_1' = \pm\sqrt{q_1^2 - mU} \tag{30}$$

(c) Impulse als Vektoren:

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} \frac{p_1 - p_2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_1 = -\boldsymbol{q}_1 \tag{31}$$

Wir entscheiden uns für die positive q_1'-Lösung. Nach dem Stoß erhalten wir

$$\boldsymbol{q}_1' = q_1' \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \sqrt{q_1^2 - mU} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_2' = -\boldsymbol{q}_1' \tag{32}$$

(d) Impulsbetrag:

$$q_1' = \sqrt{q_1^2 - mU} = \sqrt{\left(\frac{p_1 - p_2}{2}\right)^2 - mU} \tag{33}$$

Impulse im Laborsystem:

$$\boldsymbol{p}_1' = \frac{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2}{2} + \boldsymbol{q}_1' = \begin{pmatrix} \frac{p_1+p_2}{2} + \cos\alpha\sqrt{\left(\frac{p_1-p_2}{2}\right)^2 - mU} \\ \sin\alpha\sqrt{\left(\frac{p_1-p_2}{2}\right)^2 - mU} \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$\boldsymbol{p}_1' = \frac{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2}{2} - \boldsymbol{q}_1' = \begin{pmatrix} \frac{p_1+p_2}{2} - \cos\alpha\sqrt{\left(\frac{p_1-p_2}{2}\right)^2 - mU} \\ -\sin\alpha\sqrt{\left(\frac{p_1-p_2}{2}\right)^2 - mU} \end{pmatrix} \tag{35}$$

(e)

$$0 = \boldsymbol{p}_1' \cdot \boldsymbol{p}_2' = \left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)^2 - (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\left(\left(\frac{p_1 - p_2}{2}\right)^2 - mU\right) \tag{36}$$

$$= \frac{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2}{4} - \frac{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2}{4} + mU = p_1p_2 + mU \tag{37}$$

$$\Longrightarrow \; -p_1p_2 = mU \tag{38}$$

Im Fall $mU = 0$ muss gelten $p_1 = 0$ oder $p_2 = 0$, d.h. eines der Teilchen muss im Laborsystem ruhen.