[10 Punkte]

1. Warm-up

Beantworten Sie in wenigen Stichworten die folgenden Fragen:

(a) [2 Punkte] Eine Bahnkurve sei durch $\mathbf{r}(t)$ gegeben. Wie sind Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}(t)$ und Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}(t)$ definiert? Wie berechnet man aus diesen beiden Vektoren den Binormaleneinheitsvektor $\mathbf{b}(t)$?

(b) [1 Punkt] Wodurch zeichnet sich ein Inertialsystem aus?

(c) [1 Punkt] Welche Koordinatentransformation beschreibt eine Galilei-Transformation?

(d) [1 Punkt] Welcher Zusammenhang besteht zwischen Drehimpuls und dem Betrag der Flächengeschwindigkeit?

(e) [1 Punkt] Welche Bahnkurven beschreiben die Bewegung von Planeten im Gravitationspotential der Sonne?

(f) [1 Punkt] Das Gravitationspotential ist gegeben durch $U(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$. Für welche Energien des Planeten ist die Bahnkurve unbeschränkt.

(g) [1 Punkt] Welche Scheinkräfte treten in einem gleichförmig rotierenden Bezugssystem auf? *(Es sind keine Formeln gefordert.)*

(h) [1 Punkt] Wie lautet die allgemeine Lösung $x(t)$ der Bewegungsgleichung des ungedämpften harmonischen Oszillators?

(i) [1 Punkt] Welche physikalischen Größen werden durch den Virialsatz verknüpft?

[10 Punkte]

2. *Konservatives Kraftfeld, Potential*

Gegeben ist das Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (by^2 - acx^2)\,\mathbf{e}_x + 2acxy\,\mathbf{e}_y + cz\,\mathbf{e}_z\,.$$

(a) [2 Punkte] Welche Bedingung müssen die Konstanten $a, b, c \neq 0$ erfüllen, damit $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ein konservatives Kraftfeld ist?

(b) [1 Punkt] Gibt es Konstanten $a, b, c \neq 0$ für die das Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ein Zentralkraftfeld ist? Begründen Sie kurz Ihre Aussage.

(c) [3 Punkte] Bestimmen Sie für die Konstanten aus Aufgabenteil (a) das Potential $U(\mathbf{r})$. Berechnen Sie zur Kontrolle das aus dem gefundenen Potential resultierende Kraftfeld.

(d) [3 Punkte] Bestimmen Sie (für die Konstanten aus Aufgabenteil (a)), durch explizite Berechnung der Wegintegrale, die an einem Massepunkt verrichtete Arbeit entlang der Wege:

(i) C_1: Auf direktem Weg von $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ nach $(1, 1, 0)$.

(ii) C_2: In einem Viertelkreis um die x-Achse der von $(1, 1, 0)$ nach $(1, 0, 1)$.

(iii) C_3: Auf direktem Weg von $(1, 0, 1)$ nach $(0, 0, 0)$.

[1 Punkt] Nutzen Sie nun, dass das Kraftfeld konservativ ist und überprüfen Sie mit Hilfe des gefundenen Potentials $U(\mathbf{r})$ Ihre Ergebnisse aus dem Aufgabenteil (d).

... bewegt sich im Kraftfeld eines linearen Potentials [10 Punkte]

$$U(\mathbf{r}) = \alpha|\mathbf{r}|\,, \qquad \alpha > 0\,.$$

(a) [1 Punkt] Begründen Sie, weshalb die Bewegung in einer Ebene stattfinden soll.

(b) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass der Drehimpuls einer Bewegung in der xy-Ebene in Zylinderkoordinaten durch $\mathbf{L} = m\rho^2\dot{\phi}\mathbf{e}_z$ gegeben ist.

(c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Gesamtenergie E des Massenpunktes sowie das effektive Potential $U_{\text{eff}}(\rho)$. Begründen Sie kurz, weshalb hier E eine Erhaltungsgröße ist.

(d) [1 Punkt] Welche Bedingung muss $U_{\text{eff}}(\rho)$ an den Umkehrpunkten $\rho_{1,2}$ erfüllen?

(e) [3 Punkte] Skizzieren Sie das effektive Potential. Für einen speziellen Radius $\rho = \rho_0$ bewegt sich der Massepunkt auf einer stabilen Kreisbahn. Bestimmen Sie diesen Radius ρ_0 als Funktion des Drehimpulses. Bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω_0 dieser Rotation als Funktion von ρ_0, m und α.

(f) [2 Punkte] Betrachten Sie nun kleine Auslenkungen aus dieser stabilen Kreisbahn in radialer Richtung. Zeigen Sie, dass diese kleinen Auslenkungen zu harmonischen Schwingungen um die Kreisbahn führen, und berechnen Sie die Kreisfrequenz ω dieser Schwingungen.

Hinweis: Ersetzen Sie $\rho(t)$ durch $\rho_0 + \delta(t)$ mit $|\delta(t)| \ll \rho_0$ und entwickeln Sie $U_{\text{eff}}(\rho)$ um ρ_0 bis einschließlich Ordnung $\delta^2(t)$.

4. Harmonischer Oszillator mit δ-förmiger Anregung

[10 Punkte]

Ein harmonischer Oszillator mit Dämpfung γ und Eigenfrequenz ω_0 wird durch eine δ-förmige Kraft getrieben:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t) \qquad \text{mit } F(t) = 2\pi\delta(t)\,, \tag{1}$$

wobei $\omega_0 > \gamma$ ist.

(a) [2 Punkte] Berechnen Sie den Realteil, sowie den Imaginärteil der Fouriertransformierten $\tilde{x}(\omega)$, indem Sie Gleichung (1) Fouriertransformieren.

(b) [1 Punkt] Berechnen Sie die Phasendifferenz $\Delta\phi(\omega)$ zwischen $\tilde{x}(\omega)$ und $\tilde{F}(\omega)$.

(c) [2 Punkte] Skizzieren Sie die Amplitude $|\tilde{x}(\omega)|$ sowie $\Delta\phi(\omega)$ für feste $\omega_0 > \gamma$.

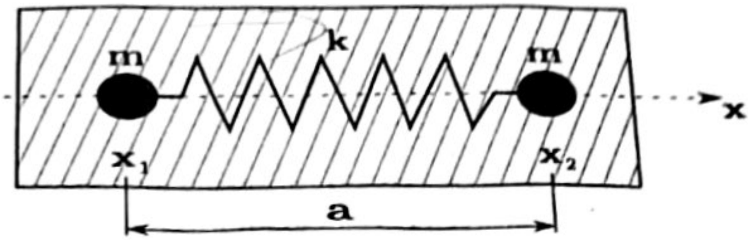
(d) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass die Frequenzen $\Omega_\pm = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ komplexe Polstellen von $\tilde{x}(\omega)$ sind.

(e) [1 Punkt] Berechnen Sie das Verhältnis der Periodendauer $T(\gamma)$ der gedämpften Schwingung zu der Periodendauer der ungedämpften Schwingung $T(\gamma = 0)$.
Hinweis: Die Periode ist definiert durch $T = \frac{2\pi}{|\mathrm{Re}\,(\Omega_\pm)|}$.

(f) [3 Punkte] Berechnen Sie die Phasendifferenz zwischen dem Impuls $\tilde{p}(\Omega_\pm) = m\tilde{v}($ und der Auslenkung $\tilde{x}(\Omega_\pm)$. Für welche Parameter ω_0 und γ, beträgt die Phasendiffe $\frac{\pi}{2}$?

5. Molekül mit Dämpfung [10 Punkte]

Ein Molekül sei beschrieben durch zwei Punktmassen $m_1 = m_2 = m$, die sich entlang der x-Achse bewegen können und über eine masselose Feder (Federkonstante k, Ruhelänge a) verbunden sind. Zusätzlich wirkt auf die Massepunkte eine dissipative Kraft die als Stokesche Reibung $F_{1/2} = -r\dot{x}_{1/2}$ modeliert wird. Der Ort von Masse $m_{1/2}$ sei durch $x_{1/2}$ gegeben. Die Anordnung sieht wie folgt aus:



(a) [1 Punkte] Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

(b) [1 Punkt] Durch welches Potential $U(x_1, x_2)$ wird die Federkraft beschrieben?

(c) [3 Punkte] Definieren Sie die Schwerpunktkoordinate $x_s(t)$ und die Relativkoordinate $x(t)$ und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für $x_s(t)$ und $x(t)$.

(d) [1 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für die Bewegungsgleichung der Schwerpunktkoordinate $x_s(t)$.

(e) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösungen $x(t)$ der Bewegungsgleichung der Relativkoordinate. Unterscheiden Sie dabei explizit die drei verschiedenen Fälle in Abhängigkeit des Dämpfungsparameters $\gamma = \frac{r}{2m}$.

(f) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie $E(x, x_s, \dot{x}, \dot{x}_s)$, d.h. die Energie als Funktion der Schwerpunkt- und Relativkoordinaten, die Form $E = T_s(\dot{x}_s) + T_{rel}(\dot{x}) + U(x)$ annimmt.

Kleine Formelsammlung

Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\,\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\phi\,\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}\,\mathbf{e}_r + \rho\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\,\mathbf{e}_z$$

Kugelkoordinaten

$$\mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z$$
$$\mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_y - \sin\theta\,\mathbf{e}_z$$
$$\mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\phi\,\mathbf{e}_y$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi$$

Fouriertransformation

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\,\tilde{f}(\omega)e^{i\omega t} \qquad \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\,f(t)e^{-i\omega t}$$