Aufgabe 1: Verständnisfragen und kleine Aufgaben $\boxed{32P}$

Beantworten Sie die Fragen kurz, aber vollständig.

(a) $\boxed{4P}$ Formulieren Sie zwei der drei Kepler'schen Gesetze in jeweils einem Satz.

(b) $\boxed{2P}$ Wie lautet die Beziehung zwischen Drehimpuls $\vec{L}$ und Drehmoment $\vec{M}$?

(c) $\boxed{3P}$ Zeigen Sie mit Hilfe der Exponentialdarstellung der trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$, dass $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ gilt.

(d) $\boxed{4P}$ Was zeichnet eine orthogonale Matrix aus? Ist die nachfolgende Matrix D eine Drehmatrix? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) $\boxed{4P}$ Gegeben sei die Differentialgleichung $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = x^4 y$. Bestimmen Sie $y(x)$ unter Beachtung der Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

(f) $\boxed{6P}$ Im Bezugssystem eines sich immer schneller drehenden Karussels wirken auf den im Feuerwehrauto sitzenden Björn-Gonzales welche Scheinkräfte? In welche Richtung wirken diese? Zur Erklärung der Richtungen geben Sie auch die Formelbeziehungen der Scheinkräfte an oder fertigen Sie eine aussagekräftige Skizze an. *Hinweis:* Das Feuerwehrauto ist auf dem Karussel fest verschraubt.

(g) $\boxed{3P}$ Berechnen Sie den Ausdruck $\sum_{i=1}^{3}(-\epsilon_{ikj} b_k a_j - \epsilon_{kij} a_j b_k)$ für $\vec{a} = (1,2,3)^T$ und $\vec{b} = (3,2,1)^T$ mit dem total antisymmetrischen Levi-Civita-Tensor ϵ_{ijk} ($\epsilon_{123} = +1$). *Hinweis:* Es gilt Einstein'sche Summenkonvention.

(h) $\boxed{6P}$ Zeigen Sie für ein Teilchen mit Masse m in einem radialen Potential $V(r)$, wie sich aus der Drehimpuls- und Energieerhaltung das effektive Potential ergibt, welches den kinetischen Anteil der azimutalen Bewegung mit einschließt.

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator $\boxed{14P}$

Ein harmonischer Oszillator sei gegeben durch die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$ mit externer Anregung $f(t) = at\Theta(t)\Theta(t_0 - t)$ mit $a > 0$ und $t_0 > 0$. *Hinweis:* Diese Aufgabe benötigt keine Green-Funktion. Es ist $\Theta(t) = 1$ für $t \geq 0$, sonst 0.

(a) $\boxed{2P}$ Skizzieren Sie die Anregung $f(t)$.

(b) $\boxed{3P}$ Lösen Sie die homogene Differentialgleichung.

(c) $\boxed{5P}$ Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ im Bereich $0 < t < t_0$ durch einen geeigneten Ansatz für eine partikuläre Lösung. Passen Sie die allgemeine Lösung den Anfangsbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ an, d.h. für $t < 0$ findet keine Bewegung statt.

(d) $\boxed{4P}$ Wie verläuft die Bewegung qualitativ für $t > t_0$? Welche Bedingungen müssen Sie an $x(t_0)$ und $\dot{x}(t_0)$ stellen? *Hinweis:* Sie müssen die Lösung $x(t)$ für $t > t_0$ nicht angeben!

Aufgabe 3: Bahnkurve $\boxed{8P}$

Gegeben ist die durch den dimensionslosen Parameter t parametrisierte Bahnkurve im $\mathbb{R}^3$

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}t^3 + 2, \frac{1+t^2}{2}, \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}\right)^T .$$

(a) $\boxed{5P}$ Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$, deren Betrag $v(t)$ und daraus den Tangenteneinheitsvektor.

(b) $\boxed{3P}$ Bestimmen Sie die Länge der Bahnkurve zwischen $t = 0$ und $t = 2$.

Aufgabe 4: Wegintegral $\boxed{12P}$

Gegeben sei ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = (0, z^2, 2yz)^T$ in kartesischen Koordinaten mit $\vec{r} = (x, y, z)^T$.

(a) $\boxed{2P}$ Zeigen Sie, dass die Rotation des Kraftfeldes verschwindet.

(b) $\boxed{3P}$ Ermitteln Sie das zum Kraftfeld zugehörige Potential $V(\vec{r})$. Berechnen Sie den Potentialunterschied zwischen $\vec{r}_1 = (0, 1, 0)^T$ und $\vec{r}_2 = (0, 0, 1)^T$.

(c) $\boxed{7P}$ Berechnen Sie die verrichtete Arbeit $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$ entlang eines Viertelkreises (mit Mittelpunkt im Ursprung) von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ und zeigen Sie, dass diese gerade dem Potentialunterschied aus (b) entspricht. Wie nennt man ein solches Kraftfeld? *Hinweis:* Sie können $\sin^3(t) = \frac{1}{4}(3\sin(t) - \sin(3t))$ nutzen.

Aufgabe 5: Bewegung im Potential $\boxed{24P}$

Ein Massenpunkt mit Masse m bewege sich im eindimensionalen Potential

$$V(x) = -V_0 \frac{1}{\cosh^2(\alpha x)}$$

mit $V_0 > 0$, $\alpha > 0$. *Hinweis:* Es ist $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

(a) $\boxed{3P}$ Skizzieren Sie qualitativ das Potential $V(x)$.

(b) $\boxed{4P}$ Bestimmen Sie für konstante Energie E mit $-V_0 < E < 0$ die Umkehrpunkte x_1 und x_2 des Teilchens. *Hinweis:* Belassen Sie arcosh im Ergebnis.

(c) $\boxed{5P}$ Entwickeln Sie $V(x)$ um $x_0 = 0$ bis zur zweiten Ordnung, also mit Fehler $\mathcal{O}(x^3)$.

(d) $\boxed{3P}$ Berechnen Sie aus dem entwickelten Potential aus (c) für kleine Auslenkungen um $x_0 = 0$ die Rückstellkraft und stellen Sie die Bewegungsgleichung des Teilchens auf.

(e) $\boxed{3P}$ Bestimmen Sie für kleine Auslenkungen die Rekurrenzzeit T, d.h. die Zeit für eine vollständige Schwingung des Teilchens, z.B. von x_1 bei $t = 0$ bis x_1 bei $t = T$.

(f) $\boxed{6P}$ Bestimmen Sie die Rekurrenzzeit für das ursprüngliche, nicht entwickelte Potential $V(x)$ über die Energieerhaltung für $E = -\frac{1}{2}V_0$. *Hinweis:* Diese Teilaufgabe ist schwierig. Sie müssen geschickt substituieren. Hilfreiche Beziehungen: $\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2-1}$,

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{2}\arcsin(x^2-1)] = \frac{-x}{\sqrt{(x^2-1)(-\frac{x^2}{2}+1)}}, \quad \frac{d}{dx}[2\sqrt{2}\arcsin(x-1)] = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(-\frac{x}{2}+1)}}$$