Klassische Theoretische Physik I – Klausur 1

Prof. Dr. J. Schmalian

M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa **13.02.2019**

---

1. Unabhängige Kurzaufgaben (29 Punkte)

(a) (5 Punkte) Welche (zwei) Eigenschaften muss eine Matrix erfüllen, damit sie eine Drehmatrix ist? Bestimmen Sie, ob es sich bei der folgenden Matrix um eine Drehmatrix handelt,

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(b) (8 Punkte) Betrachten Sie das Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -2\alpha(xy^2, -x^2y)^T$ in zwei Dimensionen. Ermitteln Sie die von $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ geleistete Arbeit entlang der Pfade $\boldsymbol{\gamma}_1(t) = (t,0)^T$, $\boldsymbol{\gamma}_2(t) = (1,t)^T$ und $\boldsymbol{\gamma}_3(t) = [(1-t),(1-t)]^T$ für den Parameter $t \in [0,1]$. Skizzieren Sie die drei Pfade und diskutieren Sie, ob F konservativ ist.

(c) (5 Punkte) Ein Teilchen der Masse m in einer Dimension bewege sich entlang der Bahnkurve $x(t) = c\,t - \tau(v_0 - c)(e^{-t/\tau} - 1)$ mit $c > 0$ und $\tau > 0$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ des Teilchens und skizzieren Sie dessen zeitlichen Verlauf. Drücken Sie die auf das Teilchen wirkende Kraft $F = F(v)$ mittels der Geschwindigkeit aus.

(d) (5 Punkte) Die Eiskunstläuferin Spinova vollbringt einen Sprung mit n-facher Umdrehung (n-Lutz) mit konstanter Körper-Drehfrequenz ν. Auf welche Höhe $h(n)$ muss die Läuferin für einen n-Lutz springen?

(e) (6 Punkte) Ein Teilchen sei einer der folgenden Kräfte ($r \equiv |\boldsymbol{r}|$) ausgesetzt:

$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r},t) = -(e^{r/r_0} - 1)F\,\boldsymbol{e}_r, \qquad \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{r},t) = -\frac{Ft_0}{r_0}\,\dot{\boldsymbol{r}}, \qquad \boldsymbol{F}_3(\boldsymbol{r},t) = \frac{F}{1+(t/t_0)^2}\,\boldsymbol{e}_r,$$

mit den Konstanten $r_0 > 0$, $t_0 > 0$, $F > 0$. Begründen Sie kurz unter welchen Kräften das Teilchen seine Energie E beibehält, und unter welchen nicht. Diskutieren Sie ebenso, ob der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ bezüglich des Koordinatenursprungs erhalten ist oder nicht.

2. Teilchen im getriebenen harmonischen Oszillator (20 Punkte)

Die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m sei durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f_0[\theta(t) - \theta(t-\tau)], \tag{2}$$

mit $\omega > 0$, $f_0 > 0$, $\tau > 0$ und der Heaviside-Funktion $\theta(t)$.

(a) (4 Punkte) Berechnen Sie das Potential $V(x)$ in den drei Zeitintervallen $t < 0$, $0 < t < \tau$, und $t > \tau$.

(b) (9 Punkte) Berechnen Sie die Lösung $x(t)$ für die Anfangsbedingungen $x(t_0) = 0$ und $\dot{x}(t_0) = 0$, wobei der Zeitpunkt $t_0 < 0$ beliebig ist.

(c) (7 Punkte) Bestimmen Sie die Gesamtenergie des Teilchens $E_<(t)$ für $t < 0$ und $E_>(t)$ für $t > \tau$ und zeigen Sie explizit, dass beide Ausdrücke zeitunabhängig sind. Für welche Werte von τ wird dem Teilchen keine Energie hinzugefügt, d.h. $E_< = E_>$?

3. Geladenes Teilchen im Magnetfeld (12 Punkte)

Ein geladenes Teilchen (Ladung $q > 0$, Masse m) bewege sich in einem konstanten Magnetfeld $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$ mit $B > 0$. Dabei wirkt die Lorentzkraft $\boldsymbol{F}_L = q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ auf das Teilchen.

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Teilchens. Führen Sie hierbei die charakteristische Frequenz $\omega = qB/m$ ein.

(b) (7 Punkte) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $\boldsymbol{r}(0) = (0,0,0)^T$ und $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = (0, v_y, v_z)^T$, wobei $\boldsymbol{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T$.
Tipp: Zeitliches Ableiten einer Gleichung kann hilfreich sein.

(c) (3 Punkte) Welche geometrische Gestalt hat die Bahnkurve? Skizzieren Sie die Kurve für den Spezialfall $v_z = 0$ in der xy-Ebene. Geben Sie im Schaubild die relevante Länge an.

4. Teilchen im Gravitationspotential (18 Punkte)

Wir betrachten zwei Himmelskörper mit Massen m_1 und m_2 an den Orten $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$, welche sich im Gravitationspotential $V(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = -Gm_1m_2/|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ gegenseitig anziehen. *Teilaufgabe (c) kann bearbeitet werden ohne, dass (a) und (b) vollständig gelöst sind.*

(a) (4 Punkte) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für die Schwerpunktskoordinate $\boldsymbol{R}$ und die Relativkoordinate $\boldsymbol{r}$ her.

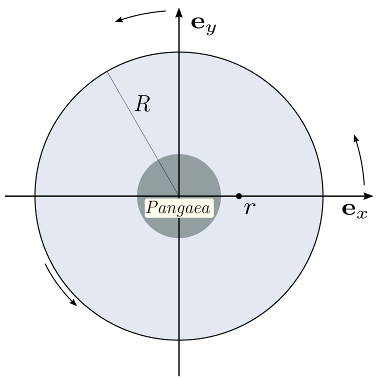
(b) (4 Punkte) Die Funktionen $\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{v}_0 t$ und $\boldsymbol{r}(t) = r_0[\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0]^T$ sollen eine Lösung zu den obigen Bewegungsgleichungen darstellen. Unterliegen die *konstanten* Parameter $\boldsymbol{R}_0$, $\boldsymbol{v}_0$, r_0, und ω irgendwelchen Bedingungen? Wenn ja, wie lauten diese?

(c) (6 Punkte) Berechnen Sie im Bezugssystem des Massenschwerpunkts die Energie E und den Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ der Relativbewegung $\boldsymbol{r}(t)$ aus (b). Drücken Sie $L = |\boldsymbol{L}|$ durch die Parameter G, m_1, m_2, und r_0 aus.

(d) (4 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe der Drehimpulserhaltung wie sich eine zeitlich veränderliche Masse m_2 auf den Radius r_0 auswirkt; d.h. berechnen und interpretieren Sie $\dot{r}_0(\dot{m}_2)$. Tipp: Es bietet sich an $\dot{L}/L$ zu berechnen.

5. Die Erde als Scheibe (21 Punkte)

Stellen Sie sich vor die Erde sei eine Scheibe. Im Zentrum der Scheibe befinde sich der Kontinent Pangaea, vor dessen Küste am Punkt $(r, 0)$ ein Schiff (Masse m) vor Anker liegt (siehe Skizze). Nun löse sich zum Zeitpunkt $t = 0$ die Ankerkette, und das Schiff bewege sich ***reibungsfrei*** auf dem Wasser. Der Kapitän bleibt auf Pangaea zurück, und muss zusehen wie sich sein Schiff aufgrund der Erdrotation $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$ ($\omega > 0$ konstant) von ihm entfernt. *Sie können (b)-(e) lösen ohne (a) gelöst zu haben.*



(a) (5 Punkte) Es sei $\boldsymbol{r} = (x, y)^T$ die Trajektorie des Schiffs aus der Perspektive des Kapitäns, d.h. im rotierenden System $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen lauten

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = 2\omega A \dot{\boldsymbol{r}} + \omega^2 \boldsymbol{r}, \tag{3}$$

und bestimmen Sie die Matrix A.

Die Gleichungen (3) lassen sich mittels des Ansatzes $\boldsymbol{r}(t) = R_2^{-1}(\omega t)\,\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ mit $\bar{\boldsymbol{r}} = (\bar{x}, \bar{y})^T$ entkoppeln, wobei R_2 eine 2×2 Drehmatrix beschreibt, siehe Formelsammlung. Die resultierende Bestimmungsgleichung für $\bar{\boldsymbol{r}}$ lautet

$$\ddot{\bar{\boldsymbol{r}}} = 0\,. \tag{4}$$

(b) (7 Punkte) Stellen Sie die Anfangsbedingungen $\boldsymbol{r}(0)$ und $\dot{\boldsymbol{r}}(0)$ auf und leiten Sie daraus die Anfangswerte $\bar{\boldsymbol{r}}(0)$ und $\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}(0)$ her. Lösen Sie die Gleichung (4) mit diesen Anfangswerten, d.h. bestimmen Sie $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$.

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie aus $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ die Trajektorie $\boldsymbol{r}(t)$.

(d) (4 Punkte) Nach welcher Zeit t_R hat das Schiff den Rand der Erde erreicht, und welche Weglänge $s(t_R)$ hat es dabei aus der Sicht des Kapitäns zurückgelegt?

(e) (3 Punkte) Skizzieren Sie die Trajektorie des Schiffes, die eine Person aus dem Weltall beobachten würde. Diese Person befinde sich in einem Inertialsystem.