Klassische Theoretische Physik I – Klausur 1

Prof. Dr. J. Schmalian
M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa **13.02.2019**

---

1. Unabhängige Kurzaufgaben (29 Punkte)

(a) (5 Punkte) Welche (zwei) Eigenschaften muss eine Matrix erfüllen, damit sie eine Drehmatrix ist? Bestimmen Sie, ob es sich bei der folgenden Matrix um eine Drehmatrix handelt,

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Eine Matrix M ist eine Drehmatrix wenn gilt

$$\det M = 1 \quad \text{und} \quad M^{-1} = M^T. \qquad \text{2 Punkte}$$

Die letzte Bedingung prüft man am einfachsten via $M^T M = \mathbb{1}$. Die gegebene Matrix M erfüllt die Bedingung

$$\det M = (1+3)/4 = 1, \qquad \text{1 Punkt}$$

und durch explizites Ausrechnen findet man

$$M^T M = \mathbb{1}. \qquad \text{1 Punkt}$$

Also ist $M^T = M^{-1}$ und somit gilt

$$M \text{ ist eine Drehmatrix.} \qquad \text{1 Punkt}$$

(b) (8 Punkte) Betrachten Sie das Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -2\alpha(xy^2, -x^2y)^T$ in zwei Dimensionen. Ermitteln Sie die von $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ geleistete Arbeit entlang der Pfade $\boldsymbol{\gamma}_1(t) = (t,0)^T$, $\boldsymbol{\gamma}_2(t) = (1,t)^T$ und $\boldsymbol{\gamma}_3(t) = [(1-t),(1-t)]^T$ für den Parameter $t \in [0,1]$. Skizzieren Sie die drei Pfade und diskutieren Sie, ob F konservativ ist.

Die geleistete Arbeit ergibt sich aus Wegintegralen der Form

$$W = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} d\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\int_0^1 dt \frac{d\boldsymbol{r}_\gamma(t)}{dt}\boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}_\gamma(t)], \qquad \text{1 Punkt}$$

wobei $\boldsymbol{r}_\gamma(t) = \boldsymbol{\gamma}_i(t)$ genau die Pfadparametrisierung ist. Wir finden

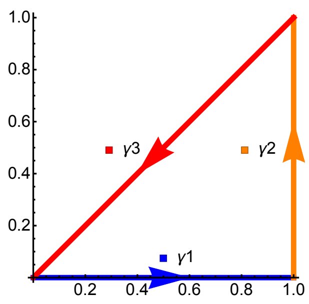
$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\gamma_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_{\gamma_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_{\gamma_3} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \qquad \text{1 Punkt}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_{\gamma_1}) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_{\gamma_2}) = -2\alpha\begin{pmatrix}t^2\\-t\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_{\gamma_3}) = -2\alpha\begin{pmatrix}(1-t)^3\\-(1-t)^3\end{pmatrix} \qquad \text{1 Punkt}$$

und daraus

$$W_{\gamma_1} = \int_0^1 dt\ 0 = 0 \quad \text{und} \quad W_{\gamma_3} = \int_0^1 dt\ 0 = 0 \qquad \text{1 Punkt}$$

$$W_{\gamma_2} = -\int_0^1 dt\ 2\alpha t\ = -\alpha \qquad \text{1 Punkt}$$



2 Punkte (einen davon für Pfeilrichtung)

Das Kraftfeld ist nicht konservativ, da ein Wegintegral über den geschlossenen Pfad $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ nicht verschwindet, oder

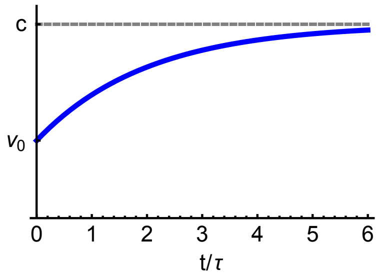
$$W_\gamma \equiv W_{\gamma_1} + W_{\gamma_2} + W_{\gamma_3} \neq 0. \qquad \text{1 Punkt}$$

(c) (5 Punkte) Ein Teilchen der Masse m in einer Dimension bewege sich entlang der Bahnkurve $x(t)=ct-\tau(v_0-c)(e^{-t/\tau}-1)$ mit $c>0$ und $\tau>0$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ des Teilchens und skizzieren Sie dessen zeitlichen Verlauf. Drücken Sie die auf das Teilchen wirkende Kraft $F = F(v)$ mittels der Geschwindigkeit aus.

Einmaliges Ableiten liefert

$$\dot{x}(t) = v(t) = c + (v_0 - c)e^{-t/\tau}. \qquad \text{1 Punkt}$$

Bei der Skizze ist insbesondere auf das asymptotische Verhalten $v(t \ll \tau) \approx v_0 - (v_0 - c)t/\tau$ und $v(t \gg \tau) \approx c$ zu achten.



2 Punkte

Die Kraft auf das Teilchen ermittelt sich aus $F(t) = ma(t)$ wobei

$$\ddot{x}(t) = a(t) = -\frac{v_0 - c}{\tau}e^{-t/\tau}. \qquad \text{1 Punkt}$$

Aus der Beziehung $-\tau a(t) = v(t) - c$ findet man dann

$$F(v) = \frac{m(c-v)}{\tau}. \qquad \text{1 Punkt}$$

(d) (5 Punkte) Die Eiskunstläuferin Spinova vollbringt einen Sprung mit n-facher Umdrehung (n-Lutz) mit konstanter Körper-Drehfrequenz ν. Auf welche Höhe $h(n)$ muss die Läuferin für einen n-Lutz springen?

Die Fallzeit $(2h/g)^{1/2}$ aus einer Höhe h errechnet sich aus der Bewegungsgleichung $\ddot{z} = -g$, mit $z(0) = h$ und $\dot{z}(0) = 0$, Springt die Läuferin auf die Höhe h ist die (Sprung-)Zeit vom Abheben bis zur Landung gegeben durch

$$t = 2(2h/g)^{1/2}, \qquad \text{3 Punkte (einen Punkt für den Faktor 2)}$$

wobei der Faktor 2 für den ganzen Parabelsprung gilt. Alternativ kann man $t = 2v_0/g$ aus der Sprunggeschwindigkeit v_0 ermitteln, und muss dann die Beziehung $v_0 = (2gh)^{1/2}$ nutzen. Für einen n-Lutz benötigt man

$$t_n = n/\nu \qquad \text{1 Punkt}$$

woraus die Beziehung

$$h(n) = \frac{gn^2}{8\nu^2} \qquad \text{1 Punkt}$$

für die Einskunstläuferin hervorgeht.

(e) (6 Punkte) Ein Teilchen sei einer der folgenden Kräfte ($r \equiv |\boldsymbol{r}|$) ausgesetzt:

$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r},t) = -(e^{r/r_0}-1)F\,\boldsymbol{e}_r, \qquad \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{r},t) = -\frac{Ft_0}{r_0}\,\dot{\boldsymbol{r}}, \qquad \boldsymbol{F}_3(\boldsymbol{r},t) = \frac{F}{1+(t/t_0)^2}\,\boldsymbol{e}_r,$$

mit den Konstanten $r_0 > 0$, $t_0 > 0$, $F > 0$. Begründen Sie kurz unter welchen Kräften das Teilchen seine Energie E beibehält, und unter welchen nicht. Diskutieren Sie ebenso, ob der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ bezüglich des Koordinatenursprungs erhalten ist oder nicht.

Damit die Energie eines Teilchens erhalten bleibt, darf die auf das Teilchen wirkende Kraft nicht explizit zeitabhängig sein ($\boldsymbol{F}_3$) und nicht von der Geschwindigkeit abhängen ($\boldsymbol{F}_2$). Somit erfüllt nur $\boldsymbol{F}_1$ beide Kriterien.
Andererseits gilt mit $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, dass $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. Insbesondere folgt damit sofort, dass radiale Kräfte ($\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_3$) den Drehimpuls erhalten. Für $\boldsymbol{F}_2$ gilt, $\dot{\boldsymbol{L}} \propto -\boldsymbol{L}$, also ist $\boldsymbol{L}$ i.A. nicht erhalten.

$\boldsymbol{F}_1$ erhält die Energie und	$\boldsymbol{F}_1$ erhält den Drehimpuls	2 Punkte
$\boldsymbol{F}_2$ erhält die Energie **nicht** und	$\boldsymbol{F}_2$ erhält den Drehimpuls **nicht**	2 Punkte
$\boldsymbol{F}_3$ erhält die Energie **nicht** und	$\boldsymbol{F}_3$ erhält den Drehimpuls	2 Punkte

2. Teilchen im getriebenen harmonischen Oszillator (20 Punkte)

Die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m sei durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f_0[\theta(t) - \theta(t-\tau)], \tag{2}$$

mit $\omega > 0$, $f_0 > 0$, $\tau > 0$ und der Heaviside-Funktion $\theta(t)$.

(a) (4 Punkte) Berechnen Sie das Potential $V(x)$ in den drei Zeitintervallen $t < 0$, $0 < t < \tau$, und $t > \tau$.

In jedem angegebenen Zeitintervall ist die Kraft zeitlich konstant und von der Form

$$F(x) = \Phi - m\omega^2 x, \qquad \text{1 Punkt}$$

wobei Φ die Werte $\Phi = 0$ oder $\Phi = mf_0$ annimmt. Integriert man diese Kraft nach x so erhält man unter Berücksichtigung des Vorzeichens das dazugehörige Potential

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. - \Phi x \qquad \text{1 Punkt}$$

Für die Intervalle $t < 0$ und $t > \tau$ gilt somit

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \qquad \text{1 Punkt}$$

Das Potential besitzt im Fall $0 < t < \tau$ die Form

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - mf_0 x. \qquad \text{1 Punkt}$$

(b) (9 Punkte) Berechnen Sie die Lösung $x(t)$ für die Anfangsbedingungen $x(t_0) = 0$ und $\dot{x}(t_0) = 0$, wobei der Zeitpunkt $t_0 < 0$ beliebig ist.

Die Lösung

$$x(t) = \bar{x}(t) + x_{\text{hom}}(t) \qquad \text{1 Punkt}$$

setzt sich zusammen aus einer partikulären Lösung $\bar{x}(t)$ und der allgemeinen homogenen Lösung $x_{\text{hom}}(t)$. Die partikuläre Lösung zu Gleichung (2) lässt sich mittels der Green'schen Funktion ermitteln. Es gilt

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t-t')f(t') = f_0\left\{\int_0^{\infty} dt'\, G(t-t') - \int_{\tau}^{\infty} dt'\, G(t-t')\right\} && \text{1 Punkt}\\ &= f_0\int_0^{\tau} dt'\, G(t-t') = \frac{f_0}{\omega}\int_0^{\tau} dt'\theta(t-t')\sin[\omega(t-t')]. && \text{1 Punkt}\end{aligned}$$

Die hier auftretende $\theta(t-t')$ Funktion sorgt dafür, dass für $t < t'$ der Integrand verschwindet. Zusammen mit der Bedingung $t' > 0$ folgt daraus, dass

$$\bar{x}(t < 0) = 0 \qquad \text{1 Punkt}$$

Für $t > 0$ gibt es zwei Fälle: Entweder $0 < t < \tau$, dann geht die Integration bis t; oder $t > \tau$, dann geht die Integration bis τ. Man berechnet also

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \frac{f_0}{\omega}\begin{cases}\int_0^t dt' \sin\left(\omega(t-t')\right), & 0 < t < \tau\\ \int_0^{\tau} dt' \sin\left(\omega(t-t')\right), & \tau < t\end{cases} && \text{1 Punkt}\\ &= \frac{f_0}{\omega^2}\begin{cases}\cos\left(\omega(t-t')\right)\Big|_0^t, & 0 < t < \tau\\ \cos\left(\omega(t-t')\right)\Big|_0^{\tau}, & \tau < t\end{cases} && \text{1 Punkt}\\ &= \frac{f_0}{\omega^2}\begin{cases}1 - \cos\left(\omega t\right), & 0 < t < \tau\\ \cos\left(\omega(t-\tau)\right) - \cos\left(\omega t\right), & \tau < t\end{cases} && \text{1 Punkt} \qquad (3)\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung besitzt die Gestalt

$$x_{\text{hom}}(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t). \qquad \text{1 Punkt}$$

Die Anfangsbedingungen sind erfüllt, wenn $c_1 = c_2 = 0$, d.h. $x_{\text{hom}}(t) = 0$, da die partikuläre Lösung für $t < 0$ bereits verschwindet. Die Lösung $x(t)$ lautet somit

$$x(t) = \begin{cases}0, & t < 0\\ (f_0/\omega^2)\,[1 - \cos(\omega t)], & 0 < t < \tau\\ (f_0/\omega^2)\,\{\cos[\omega(t-\tau)] - \cos(\omega t)\}, & \tau < t\end{cases} \qquad \text{1 Punkt} \tag{4}$$

(c) (7 Punkte) Bestimmen Sie die Gesamtenergie des Teilchens $E_<(t)$ für $t < 0$ und $E_>(t)$ für $t > \tau$ und zeigen Sie explizit, dass beide Ausdrücke zeitunabhängig sind. Für welche Werte von τ wird dem Teilchen keine Energie hinzugefügt, d.h. $E_< = E_>$?

In beiden Zeitintervallen lautet das Potential [aus (a)] $V(x) = m\omega^2 x^2/2$, und damit ist die Gesamtenergie

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \qquad \text{1 Punkt}$$

Aus (4) berechnet man die Geschwindigkeit

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ (f_0/\omega)\{\sin(\omega t) - \sin[\omega(t-\tau)]\}, & \tau < t \end{cases} \qquad \text{1 Punkt}$$

und damit berechnet man

$$E(t < 0) = 0, \qquad \text{1 Punkt}$$

$$\begin{aligned} E(t > \tau) &= \frac{mf_0^2}{2\omega^2}\Big[\{\sin[\omega(t-\tau)] - \sin(\omega t)\}^2 + \{\cos[\omega(t-\tau)] - \cos(\omega t)\}^2\Big] \\ &= \frac{mf_0^2}{\omega^2}\Big[1 - \sin[\omega(t-\tau)]\sin(\omega t) - \cos[\omega(t-\tau)]\cos(\omega t)\Big] && \text{1 Punkt} \\ &= \frac{mf_0^2}{\omega^2}[1 - \cos(\omega\tau)], && \text{1 Punkt} \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die auf der Formelsammlung angegebene Identität verwendet haben. Es gilt

$E_>$ und $E_<$ sind zeitlich unabhängig 1 Punkt

Die Energie im Intervall $t > \tau$ verschwindet genau dann wenn $\omega\tau = 2\pi n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dies ist der Fall wenn gilt

$$\tau_n = 2\pi n/\omega. \qquad \text{1 Punkt}$$

3. Geladenes Teilchen im Magnetfeld (12 Punkte)

Ein geladenes Teilchen (Ladung $q > 0$, Masse m) bewege sich in einem konstanten Magnetfeld $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$ mit $B > 0$. Dabei wirkt die Lorentzkraft $\boldsymbol{F}_L = q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ auf das Teilchen.

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Teilchens. Führen Sie hierbei die charakteristische Frequenz $\omega = qB/m$ ein.

Die Lorentzkraft, die ein Teilchen für $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$ und $\boldsymbol{E} = 0$ erfährt, lautet

$$\boldsymbol{F}_L = q\,\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B} = q \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = qB \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{1 Punkt}$$

und damit lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{1 Punkt} \qquad (5)$$

(b) (7 Punkte) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $\boldsymbol{r}(0) = (0, 0, 0)^T$ und $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = (0, v_y, v_z)^T$, wobei $\boldsymbol{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T$.
Tipp: Zeitliches Ableiten einer Gleichung kann hilfreich sein.

Für die z Richtung ($\ddot{z} = 0$) findet man mit $z(0) = 0$ und $\dot{z}(0) = v_z$ sofort

$$z(t) = v_z t\ . \qquad \text{1 Punkt}$$

Um die x, y Gleichungen zu entkoppeln leiten wir die erste Gleichung ab, und setzen die zweite Gleichung darin ein. Wir finden

$$\dddot{x} = -\omega^2\,\dot{x}.$$

Diese Gleichung ist ein freier harmonischer Oszillator für $\dot{x}$, mit der allgemeinen Lösung

$$\dot{x}(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\ . \qquad \text{1 Punkt}$$

Die dazugehörigen Anfangsbedingungen lauten $\dot{x}(0) = 0$ und $\ddot{x}(0) = \omega\dot{y}(0) = \omega v_y$. Also muss gelten $A = 0$ und $B = v_y$. Damit berechnen wir die x- Koordinate zu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_y \sin(\omega t) && \text{1 Punkt} \\ x(t) &= -\frac{v_y}{\omega}[\cos(\omega t) - 1], && \text{1 Punkt} \end{aligned}$$

wobei wir die Anfangsbedigung $x(0) = 0$ direkt eingesetzt haben. Schließlich berechnen wir noch die y Komponente

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\omega\dot{x} = -\omega v_y \sin(\omega t), && \text{1 Punkt} \\ \dot{y} &= v_y + v_y[\cos(\omega t) - 1] = v_y \cos(\omega t), && \text{1 Punkt} \\ y &= \frac{v_y}{\omega}\sin(\omega t). && \text{1 Punkt} \end{aligned}$$

Damit lautet die Trajektorie des Teilchens

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{v_y}{\omega}[1 - \cos(\omega t)] \\ \frac{v_y}{\omega}\sin(\omega t) \\ v_z t \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

(c) (3 Punkte) Welche geometrische Gestalt hat die Bahnkurve? Skizzieren Sie die Kurve für den Spezialfall $v_z = 0$ in der xy-Ebene. Geben Sie im Schaubild die relevante Länge an.

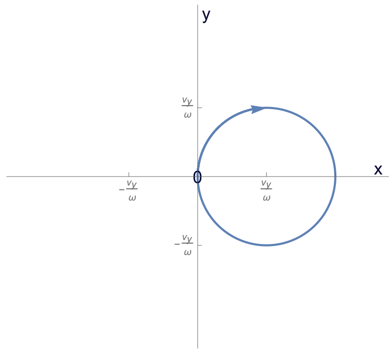
Die Trajektorie beschreibt eine

Helix (auch Schraube oder zylindrische Spirale genannt) 1 Punkt

die sich um einen in die z Richtung zeigenden Zylinder des Radius

$R = v_y/\omega$ 1 Punkt

wendet. Das Schaubild stellt die Trajektorie (6) für $v_z = 0$ in der xy-Ebene dar.



1 Punkt

4. Teilchen im Gravitationspotential (18 Punkte)

Wir betrachten zwei Himmelskörper mit Massen m_1 und m_2 an den Orten $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$, welche sich im Gravitationspotential $V(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = -Gm_1m_2/|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ gegenseitig anziehen. *Teilaufgabe (c) kann bearbeitet werden ohne, dass (a) und (b) vollständig gelöst sind.*

(a) (4 Punkte) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für die Schwerpunktskoordinate $\boldsymbol{R}$ und die Relativkoordinate $\boldsymbol{r}$ her.

Die Bewegungsgleichungen für $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ lauten

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\nabla_{\boldsymbol{r}_1} V(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \qquad \text{1 Punkt} \qquad (7)$$

$$m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -\nabla_{\boldsymbol{r}_2} V(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = +\nabla_{\boldsymbol{r}_1} V(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \qquad \text{1 Punkt (Vorzeichen)} \qquad (8)$$

Summiert man beide Gleichungen findet man

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = 0 \qquad \text{1 Punkt} \qquad (9)$$

mit der Schwerpunktskoordinate $\boldsymbol{R} = (m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2)/M$ und der Masse $M = m_1 + m_2$. Multipliziert man Gleichung (7) mit m_2 und Gleichung (8) mit m_1, liefert die Differenz

$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = -\nabla V(\boldsymbol{r}) \qquad \text{1 Punkt} \qquad (10)$$

wobei wir verwenden, dass $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, $\nabla = \nabla_{\boldsymbol{r}}$, und $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$.

(b) (4 Punkte) Die Funktionen $\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{v}_0 t$ und $\boldsymbol{r}(t) = r_0[\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0]^T$ sollen eine Lösung zu den obigen Bewegungsgleichungen darstellen. Unterliegen die *konstanten* Parameter $\boldsymbol{R}_0$, $\boldsymbol{v}_0$, r_0, und ω irgendwelchen Bedingungen? Wenn ja, wie lauten diese?

Da Gleichung (9) für beliebige Konstanten $\boldsymbol{R}_0$ und $\boldsymbol{v}_0$ erfüllt ist sind

$$\boldsymbol{R}_0 \text{ und } \boldsymbol{v}_0 \text{ frei wählbar} \qquad \text{1 Punkt}$$

Setzt man die Funktion $\boldsymbol{r}(t)$ in Gleichung (10) ein, findet man (es gilt $m_1m_2 = M\mu$)

$$-\mu\omega^2 r_0 \boldsymbol{e}_r = -\frac{GM\mu}{r_0^2}\boldsymbol{e}_r \qquad \text{2 Punkte}$$

mit dem Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_r \equiv \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$. Um diese Gleichung zu erfüllen muss gelten, dass

$$\omega^2 = GM/r_0^3 \text{ (Kepler'sches Gesetz)} \qquad \text{1 Punkt} \qquad (11)$$

(c) (6 Punkte) Berechnen Sie im Bezugssystem des Massenschwerpunkts die Energie E und den Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ der Relativbewegung $\boldsymbol{r}(t)$ aus (b). Drücken Sie $L = |\boldsymbol{L}|$ durch die Parameter G, m_1, m_2, und r_0 aus.

Die Energie setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie der rotierenden Masse

$$E_{\text{kin}} = \mu\dot{\boldsymbol{r}}^2/2 = \mu r_0^2\omega^2/2 \qquad \text{1 Punkt}$$

und der potentiellen Energie

$$E_{\text{pot}} = -GM\mu/r_0. \qquad \text{1 Punkt}$$

Man findet also [zweite Gleichung erhält man durch Substitution aus Gl. (11)]

$$E = \frac{\mu}{2}r_0^2\omega^2 - \frac{GM\mu}{r_0} = -\frac{GM\mu}{2r_0}. \qquad \text{1 Punkt}$$

Der Drehimpuls ist gegeben durch

$$\boldsymbol{L} = \mu(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = (0, 0, \mu r_0^2\omega)^T. \qquad \text{2 Punkte}$$

Aus Gleichung (11) folgt $L = |\boldsymbol{L}| = (GMr_0)^{1/2}\mu$, oder

$$L = m_1m_2\sqrt{\frac{Gr_0}{m_1 + m_2}} \qquad \text{1 Punkt} \qquad (12)$$

(d) (4 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe der Drehimpulserhaltung wie sich eine zeitlich veränderliche Masse m_2 auf den Radius r_0 auswirkt; d.h. berechnen und interpretieren Sie $\dot{r}_0(\dot{m}_2)$. Tipp: Es bietet sich an $\dot{L}/L$ zu berechnen.

Einmaliges zeitliches Ableiten des Drehimpulses (12) liefert die Beziehung

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{1}{2}\frac{\dot{r}_0}{r_0} + \frac{1}{2}\frac{2m_1 + m_2}{m_2(m_1 + m_2)}\dot{m}_2 = 0 \qquad \text{2 Punkte}$$

Daraus folgt

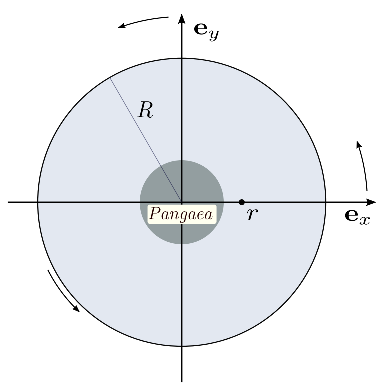
$$\dot{r}_0(\dot{m}_2) = -\frac{(2m_1 + m_2)r_0}{m_2(m_1 + m_2)}\dot{m}_2 \qquad \text{1 Punkt} \tag{13}$$

Da der Bruch auf der rechten Seite immer positiv ist, nimmt der Abstand zwischen den Massen zu wenn die Masse m_2 kleiner wird, d.h. [mit $\alpha(t) > 0$]

$$\dot{r}_0 = -\alpha(t)\,\dot{m}_2 \qquad \text{1 Punkt}$$

5. Die Erde als Scheibe (21 Punkte)

Stellen Sie sich vor die Erde sei eine Scheibe. Im Zentrum der Scheibe befinde sich der Kontinent Pangaea, vor dessen Küste am Punkt $(r, 0)$ ein Schiff (Masse m) vor Anker liegt (siehe Skizze). Nun löse sich zum Zeitpunkt $t = 0$ die Ankerkette, und das Schiff bewege sich ***reibungsfrei*** auf dem Wasser. Der Kapitän bleibt auf Pangaea zurück, und muss zusehen wie sich sein Schiff aufgrund der Erdrotation $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$ ($\omega > 0$ konstant) von ihm entfernt. *Sie können (b)-(e) lösen ohne (a) gelöst zu haben.*



(a) (5 Punkte) Es sei $\boldsymbol{r} = (x, y)^T$ die Trajektorie des Schiffs aus der Perspektive des Kapitäns, d.h. im rotierenden System $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen lauten

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = 2\omega A \dot{\boldsymbol{r}} + \omega^2 \boldsymbol{r}, \tag{14}$$

und bestimmen Sie die Matrix A.

Im mitrotierenden System (wobei hier $P = 0$ und $\dot{\omega} = 0$) treten hier die Zentrifugalkraft $\boldsymbol{F}_z$ und die Corioliskraft $\boldsymbol{F}_c$ auf. Für $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$ berechnet man

$$\boldsymbol{F}_c = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = 2m\omega \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{1 Punkt}$$

$$\boldsymbol{F}_z = -m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] = -m\omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = m\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{2 Punkte}$$

Somit lauten die Bewegungsgleichungen (wobei $\boldsymbol{r} = (x, y)^T$)

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = 2\omega \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \dot{\boldsymbol{r}} + \omega^2 \boldsymbol{r}. \qquad \text{2 Punkte} \tag{15}$$

Die Gleichungen (14) lassen sich mittels des Ansatzes $\boldsymbol{r}(t) = R_2^{-1}(\omega t)\, \bar{\boldsymbol{r}}(t)$ mit $\bar{\boldsymbol{r}} = (\bar{x}, \bar{y})^T$ entkoppeln, wobei R_2 eine 2×2 Drehmatrix beschreibt, siehe Formelsammlung. Die resultierende Bestimmungsgleichung für $\bar{\boldsymbol{r}}$ lautet

$$\ddot{\bar{\boldsymbol{r}}} = 0\,. \tag{16}$$

(b) (7 Punkte) Stellen Sie die Anfangsbedingungen $\boldsymbol{r}(0)$ und $\dot{\boldsymbol{r}}(0)$ auf und leiten Sie daraus die Anfangswerte $\bar{\boldsymbol{r}}(0)$ und $\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}(0)$ her. Lösen Sie die Gleichung (16) mit diesen Anfangswerten, d.h. bestimmen Sie $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$.

Die Anfangsbedingungen des Schiffes lauten

$$\boldsymbol{r}(0) = (r, 0)^T\,, \qquad \dot{\boldsymbol{r}}(0) = (0, 0)^T\,. \qquad \text{1 Punkt}$$

Um eine Beziehung zu $\bar{\boldsymbol{r}}$ herzustellen, verwendet man den Ansatz $\boldsymbol{r}(t) = R_2^{-1}(\omega t)\, \bar{\boldsymbol{r}}(t)$, d.h.

$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) = R_2(\omega t) \boldsymbol{r}(t)\,,$$
$$\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}(t) = \dot{R}_2(\omega t) \boldsymbol{r}(t) + R_2(\omega t) \dot{\boldsymbol{r}}(t)\,.$$

Damit ergeben sich die Anfangsbedingungen zu

$$\bar{\boldsymbol{r}}(0) = R_2(0) \boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{1 Punkt}$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}(0) = \dot{R}_2(0) \boldsymbol{r}(0) + R_2(0) \dot{\boldsymbol{r}}(0) = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega r \end{pmatrix}, \qquad \text{3 Punkte}$$

wobei wir

$$R_2(\omega t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}, \qquad R_2(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{R}_2(\omega t) = \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t \\ \cos \omega t & -\sin \omega t \end{pmatrix}, \qquad \dot{R}_2(0) = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

verwendet haben. Mit diesen Anfangswerten löst man Gleichung (16) und berechnet

$$\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}(t) = \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ r\omega \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \quad \bar{\boldsymbol{r}}(t) = \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}(0)\, t + \bar{\boldsymbol{r}}(0) = \begin{pmatrix} r \\ r\omega t \end{pmatrix}. \qquad \text{2 Punkte}$$

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie aus $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ die Trajektorie $\boldsymbol{r}(t)$.

Mit dem berechneten $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ ergibt sich

$$\boldsymbol{r}(t) = R_2(\text{-}\omega t)\bar{\boldsymbol{r}}(t) = r\begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ \text{-}\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\omega t + \omega t\sin\omega t \\ \text{-}\sin\omega t + \omega t\cos\omega t \end{pmatrix}. \quad \text{2 Punkte}$$

(d) (4 Punkte) Nach welcher Zeit t_R hat das Schiff den Rand der Erde erreicht, und welche Weglänge $s(t_R)$ hat es dabei aus der Sicht des Kapitäns zurückgelegt?

Das Schiff hat den Rand erreicht, wenn gilt

$$R = |\boldsymbol{r}(t_1)| = r\sqrt{1+\omega^2 t_1^2}\,, \qquad \text{1 Punkt}$$

$$\rightarrow \qquad t_1 = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1}\,. \qquad \text{1 Punkt}$$

Um den zurückgelegten Weg zu berechnen benötigen wir die Geschwindigkeit

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = r\omega^2 t\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\sin\omega t \end{pmatrix}, \qquad \text{1 Punkt}$$

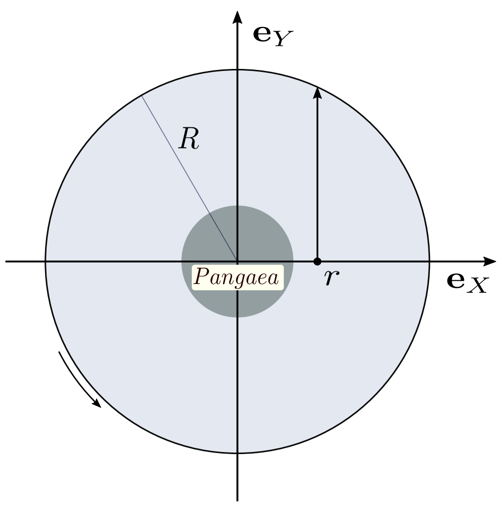
und deren Betrag $|\dot{\boldsymbol{r}}(t)| = r\omega^2 t$. Damit berechnet sich der zurückgelegte Weg zu

$$s(t_1) = \int_0^{t_1} dt'|\dot{\boldsymbol{r}}(t')| = \frac{1}{2}r\omega^2 t_1^2 = \frac{1}{2}r\left[\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1\right], \qquad \text{1 Punkt}$$

unabhängig von der Erdrotation.

(e) (3 Punkte) Skizzieren Sie die Trajektorie des Schiffes, die eine Person aus dem Weltall beobachten würde. Diese Person befinde sich in einem Inertialsystem.

Die Trajektorie des Schiffes aus der Weltall-Perspektive ist in Abbildung 17 dargestellt. *Alternativ zu (d)* hätte man die Zeit t_1 auch aus dem System der Weltall-Perspektive bestimmen können. In diesem System bewegt sich das Schiff in einer geraden Linie in die $\boldsymbol{e}_Y$ Richtung mit der Geschwindigkeit ωr. Die Länge dieser Linie ergibt sich über den Satz des Pythagoras zu $s_w = \sqrt{R^2 - r^2}$, und damit ergibt sich die Zeit bis zum Rand als $t_1 = s_w/\omega r = (1/\omega)\sqrt{(R/r)^2 - 1}$. Hier sieht man schön, dass die Zeit absolut ist (solange keine relativistischen Effekte betrachtet werden), die Längen der Trajektorien hingegen hängen vom Betrachtungssystem ab.



3 Punkte (17)

Perspektive aus dem Weltall im fixen Koordinatensystem $(\boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y)$. Die Trajektorie des Schiffes ist eine geradlinige Bewegung entlang der $\boldsymbol{e}_Y$ Richtung.

Dies ist die letzte Seite