Klassische Theoretische Physik I WS 19/20

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny

Klausur
Lösungsvorschlag

---

1. Unabhängige Kurzaufgaben: (25 Punkte)

(a) *Betrachten Sie das Kraftfeld*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \alpha \left(y^2 z^3 - 12x^3 z^2, \quad 2xyz^3, \quad 3xy^2 z^2 - 6x^4 z\right)$$

in drei Dimensionen. Ist das Kraftfeld konservativ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

1: Die Kraft ist konservativ wenn

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0.$$

2: Berechnen. Es folgt

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 6xyz^2 - 6xyz^2 \\ 3y^2 z^2 - 24x^3 z - (3y^2 z^2 - 24x^3 z) \\ 2yz^3 - 2yz^3 \end{pmatrix} = 0.$$

Antwort: Die Kraft ist konservativ.

(b) *Betrachten Sie das Kraftfeld*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \alpha \left(xy^2, \quad -x^2 y\right)$$

in zwei Dimensionen. Ermitteln Sie die von $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ geleistete Arbeit entlang der Pfade

$$\gamma_1(t) = \left(t, \quad 0\right), \quad \gamma_2(t) = \left(1, \quad t\right), \quad \gamma_3(t) = \left(1-t, \quad 1-t\right), \quad t \in [0,1].$$

Diskutieren Sie ob $\boldsymbol{F}$ konservativ ist.

Lösung

1 : Die Kraft auf den Pfaden:

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(t)] = \alpha \begin{cases} \left(0, \quad 0\right), & \gamma_1 \\ \left(t^2, \quad -t\right), & \gamma_2 \\ \left((1-t)^3, \quad -(1-t)^3\right), & \gamma_3 \end{cases}.$$

Ohne weitere Rechnungen

$$W_{\gamma_1} = 0.$$

2 : Arbeit als Integral über t

$$W_\gamma = \int_0^1 dt \boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(t)] \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

3 : Die Ableitung

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0, & 1 \end{pmatrix}, & \gamma_2 \\ \begin{pmatrix} -1, & -1 \end{pmatrix}, & \gamma_3 \end{cases}.$$

4 : Skalarprodukt

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(t)] \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \alpha \begin{cases} -t, & \gamma_2 \\ 0, & \gamma_3 \end{cases}.$$

Ohne weitere Rechnungen

$$W_{\gamma_3} = 0.$$

5 : Integral

$$W_{\gamma_2} = \int_0^1 dt(-t) = -\frac{\alpha}{2}.$$

Antwort 1 : die Arbeit beträgt

$$W_\gamma = \begin{cases} 0, & \gamma_1 \\ -\alpha/2, & \gamma_2 \\ 0, & \gamma_3 \end{cases}.$$

Antwort 2 (1 Punkt): Die Kraft ist nicht konservativ, weil die Arbeit entlang eines geschlossenen Pfades nicht verschwindet.

(c) *Ein physikalisches Pendel besteht aus einem massenlosen festen Stab und einer Masse m am Ende des Stabes. Der Stab wird zunächst vertikal positioniert, wobei die Masse nach oben zeigt. Die Anfangsgeschwindigkeit sei null. Von dieser Position aus bewegt sich das Pendel in Richtung des stabilen Gleichgewichts und passiert es mit einer Winkelgeschwindigkeit von ω. Finden Sie die Kreisfrequenz der kleinen Schwingungen des Pendels (die Reibung können Sie vernachlässigen).*

Lösung

1: Energieerhaltung (die potenzielle Energie wird vollstndig in die kinetische Energie umgewandelt)

$$2mgl = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{4g}{\omega^2}.$$

2: Kreisfrequenz der kleinen Oszillationen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{\omega}{2}$$

Antwort:

$$\omega_0 = \frac{\omega}{2}$$

2. Newton'sche Dynamik I: (25 Punkte)

Ein Massenteilchen m bewegt sich in 3 Dimensionen aufgrund der Kraft

$$\boldsymbol{F} = -\alpha m \boldsymbol{r},$$

wobei $\alpha > 0$ eine positive Konstante ist und $\boldsymbol{r}$ der Radiusvektor des Teilchens relativ zum Koordinatenursprung ist. Finden Sie die Flugbahn seiner Bewegung, wenn im Anfangsmoment

$$\boldsymbol{r}(t=0) = r_0 \boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{v}(t=0) = v_0 \boldsymbol{e}_y,$$

wobei $\boldsymbol{e}_x$ und $\boldsymbol{e}_y$ die Einheitsvektoren der x- und y- Achsen sind.

Lösung

1: Die Kraft ist eine konservative Zentralkraft, deswegen gilt der Drehimpulserhaltungssatz. Wegen der Konstanz des Drehimpulses erfolgt die Bewegung in einer festen Ebene. Diese sei die xy-Ebene. **Alternativ: noch die dritte Bewegungsgleiching für z schreiben wie unten.**

2: x- und y-Komponente der Newton'schen Gleichung

$$m\ddot{x} = -m\alpha x, \quad m\ddot{y} = -m\alpha y.$$

dazu kommt

$$m\ddot{z} = -m\alpha z\ .$$

3: Allgemeine Lösung der Differentialgleichung (gilt für beide)

$$\ddot{x} + \alpha x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \quad \omega^2 = \alpha.$$

4: Lösung der Gleichung in x-Richtung mit den Anfangsbedingungen

$$x(0) = r_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = r_0\cos\omega t.$$

5: Lösung der Gleichung in y-Richtung mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$

6: Flugbahn

$$\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^2}{r_0^2} + \alpha\frac{y^2}{v_0^2} = 1.$$

Dazu noch $z = 0$

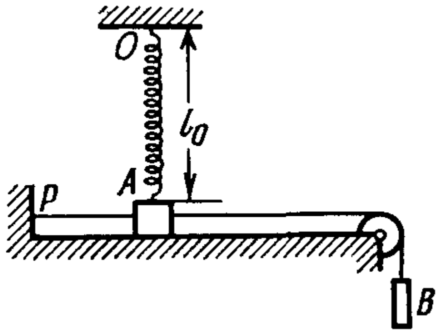
Antwort: Die Flugbahn ist eine Ellipse

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \alpha\frac{y^2}{v_0^2} = 1.$$

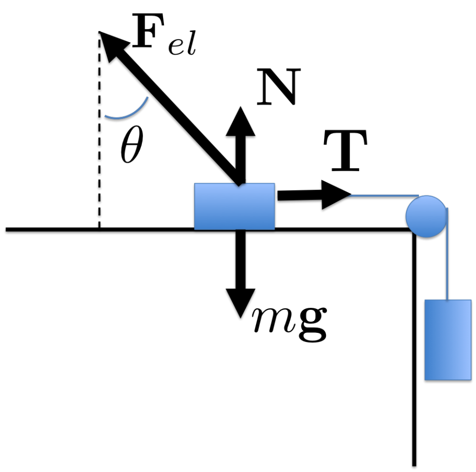
3. Newton'sche Dynamik II: (25 Punkte)

Ein kleiner Stab A, der auf einer glatten horizontalen Ebene ruht, ist mit Fäden an einem Punkt P (siehe Abbildung) und mit Hilfe einer schwerelosen Rolle an einem Gewicht B befestigt, das die gleiche Masse wie den Stab selbst besitzt.

Außerdem ist der Stab auch an einem Punkt O mittels einer leichten, ungedehnten Feder der Länge l_0 und der Federkonstante $k = 5mg/l_0$ befestigt, wobei m die Masse des Stabes ist. Nachdem der Faden PA abgeschnitten wurde, beginnt sich der Stab zu bewegen. Finden Sie seine Geschwindigkeit in dem Moment, in dem er von der Ebene abhebt (fliegt).



Lösung



1: Newton'sche Gleichung während der Bewegung bevor Trennung

$$m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_{el} = m\boldsymbol{a}.$$

$\boldsymbol{F}_{el}$ steht für die elastische Kraft der Feder.

2: Die y-Komponente der Newton'schen Gleichung

$$N + F_{el}\cos\theta - mg = 0.$$

3: Im Trennungspunkt soll die Normalkraft verschwinden

$$N = 0.$$

4: Wir bestimmen die Verlängerung der Feder am Trennungspunkt. Die Länge der Feder zum Zeitpunkt der Trennung ist $l_0 + \Delta l$.

$$F_{el} = k\Delta l, \quad F_{el}\cos\theta = mg, \quad \cos\theta = \frac{l_0}{l_0+\Delta l} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{kl_0\Delta l}{l_0+\Delta l} = mg\ .$$

Für $k = 5mg/l_0$

$$\frac{5\Delta l}{l_0+\Delta l} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta l = \frac{l_0}{4},\ \cos\theta = \frac{4}{5},\ \sin\theta = \frac{3}{5}$$

5: Energiebilanz im Moment der Trennung. Die kinetische Energie der beiden Massen beträgt $2\frac{mv^2}{2}$. Die Potentielle Energie der Feder wegen der Verlängerung: $\frac{k\Delta l^2}{2}$. Die Potentielle Energie der hängenden Masse hat sich um $mg\sqrt{(l_0+\Delta l)^2 - l_0^2}$ erniedrigt.

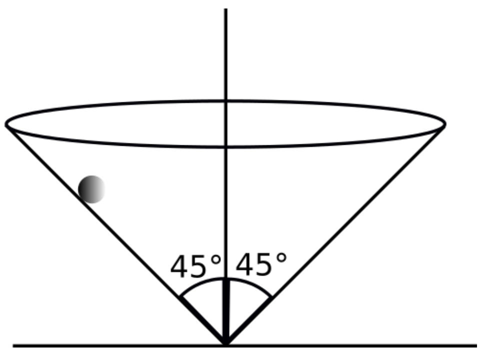
$$0 = 2\frac{mv^2}{2} + \frac{k\Delta l^2}{2} - mg\sqrt{(l_0+\Delta l)^2 - l_0^2} \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = gl_0\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{16\cdot 2}\right) = \frac{19}{32}gl_0.$$

Antwort:

$$v = \sqrt{\frac{19}{32}gl_0}.$$

4. Freier Fall im Kegel: (25 Punkte)

Ein Massenpunkt der Masse m befindet sich auf der inneren reibungslosen Oberfläche eines unendlich hohen, geraden Kreiskegels mit halbem Öffnungswinkel von 45°. Die Achse des nach oben geöffneten Kegels steht senkrecht zur Erdoberfläche. Auf den Massenpunkt wirkt die übliche Gravitationskraft.



(a) (10 Punkte) *Die Anfangsgeschwindigkeit mit Betrag v_0 ist horizontal ausgerichtet. Wie muss man die Anfangshöhe $z_0(v_0)$ wählen, sodass die Hhe konstant bleibt, $z(t) = z_0$.*

1. Variante: Die Position des Massenpunktes $\mathbf{R} = r\mathbf{e_r} + z\mathbf{e_z}$ und $r = z$ ($\mathbf{e_r}$ ist der radiale Einheitsvektor in der x-y Ebene). Die gesamte Kraft, die auf den Massenpunkt wirkt:

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{e_z} + \frac{N}{\sqrt{2}}(\mathbf{e_z} - \mathbf{e_r})\ ,$$

wobei N der noch unbekannte betrag der Reaktionskraft ist. ($\cos 45° = \sin 45° = 1/\sqrt{2}$)
Wenn die Höhe konstant bleibt, der einzige Beitrag zur Beschleunigung ist die Zentripetalbeschleunigung. Die ist gegeben durch (Polarkoordinaten r, φ)

$$\mathbf{a} = -r\dot{\varphi}^2\,\mathbf{e_r} = -\frac{v_0^2}{r}\,\mathbf{e_r} \ .$$

aus $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ erhalten wir $N/\sqrt{2} = mv_0^2/r$ und $N/\sqrt{2} = mg$. Daraus folgt

$$z_0(v_0) = r = \frac{v_0^2}{g} \ .$$

2. Variante: Wir benutzen Polarkoordinaten in der x-y Ebene (r, φ). Auf der Kegel-Oberfläche gilt $z = r$. Die Kraft die auf den Massenpunkt wirkt ist zentral in der x-y Ebene. Das bedeutet, dass die z-Komponente des Drehimpulses erhalten ist: $L_z = mr^2\dot{\varphi} = const$. Das effektive Potential lautet $(z = r)$

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L_z^2}{2mr^2} = mgr + \frac{L_z^2}{2mr^2} \ .$$

Die Lösung mit konstantem r entspricht dem Minimum von $V_{\text{eff}}(r)$. Wir erhalten im Minimum)

$$\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr} = mg - \frac{L_z^2}{mr^3} = 0 \ .$$

Aus der Anfangsbedingung folgt $L_z = mrv_0$. Das ergibt wieder

$$r = z_0(v_0) = \frac{v_0^2}{g} \ .$$

(b) (15 Punkte) *Wir bleiben bei der gleichen horizontalen Anfangsgeschwindigkeit v_0. Die neue Anfangshöhe ist jetzt aber nach oben verschoben $z(t = 0) = z_0(v_0) + \Delta z$. Zeigen Sie, dass die Höhe als Funktion der Zeit oszilliert. Finden Sie die Oszillationsfrequenz für den Fall $\Delta z \ll z_0(v_0)$.*
1. Variante: Wir nehmen jetzt nicht an, dass die Höhe konstant bleibt und leiten die Bewegungsgleichungen her. Dafür brauchen wir die Beschleunigung. Wir berechnen erst die Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} = \dot{r}\mathbf{e_r} + \dot{r}\mathbf{e_z} + r\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{r} = \dot{r}\mathbf{e_r} + \dot{r}\mathbf{e_z} + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

(hier $\mathbf{e_r} \equiv (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ und $\mathbf{e}_\varphi \equiv (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$). Die Beschleunigung lautet

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{R}} = \ddot{r}\mathbf{e_r} + \ddot{r}\mathbf{e_z} + 2\dot{r}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{r} + r\ddot{\mathbf{e}}_\mathbf{r} = \ddot{r}\mathbf{e_r} + \ddot{r}\mathbf{e_z} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\mathbf{e_r} \ .$$

Aus $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ erhalten wir

$$\frac{N}{\sqrt{2}} - mg = m\ddot{r} \qquad (\mathbf{e_z})$$

$$-\frac{N}{\sqrt{2}} = m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 \qquad (\mathbf{e_r})$$

$$0 = m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \qquad (\mathbf{e}_\varphi)$$

Die dritte Gleichung entspricht dem Erhalten der z-Komponente des Drehimpulses. Man kann das wie folgt sehen: $L_z = mr^2\dot{\varphi}$ und

$$dL_z/dt = mr(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0 \ .$$

Also $L_z = const.$ und

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z}{mr^2} \ .$$

Wir addieren die zwei ersten Gleichungen und erhalten

$$2m\ddot{r} = -mg + mr\dot{\varphi}^2 = -mg + \frac{L_z^2}{mr^3} \ .$$

Diese Gleichung kann man mithilfe eines Potentials schreiben:

$$2m\ddot{r} = -mg + \frac{L_z^2}{mr^3} = -\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr} \ ,$$

wobei

$$V_{\text{eff}}(r) = mgr + \frac{L_z^2}{2mr^2} \ .$$

Die Besonderheit ist, dass auf der linken Seite $2m$ statt m steht. Das Potential hat ein Minimum gegeben durch

$$\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr} = mg - \frac{L_z^2}{mr^3} = 0 \ ,$$

$$r_{min} = \left(\frac{L_z^2}{gm^2}\right)^{1/3} \ .$$

Sowohl für $r \to 0$ als auch für $r \to +\infty$ gilt $V_{\text{eff}} \to +\infty$. Das bedeutet dass die Bewegung immer beschränkt ist, also r (und damit auch z) oszilliert.
Für kleine Oszillationen um das Minimum ($r = r_{\text{min}} + \delta r$) kann man die effektive Kraft entwickeln:

$$-\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr} \approx -\frac{dV_{\text{eff}}(r_{\text{min}})}{dr} - \frac{d^2V_{\text{eff}}(r_{\text{min}})}{dr^2}\delta r = 0 - \frac{d^2V_{\text{eff}}(r_{\text{min}})}{dr^2}\delta r \ .$$

Das ergibt

$$-\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr} \approx -\frac{3L_z^2}{mr_{\text{min}}^4}\delta r = -3m^{5/3}\,g^{4/3}\,L_z^{-2/3}\delta r \ .$$

Die Bewegungsgleichung jetzt lautet

$$\delta\ddot{r} = -(3/2)m^{2/3}\,g^{4/3}\,L_z^{-2/3}\delta r \ .$$

Also die Oszillationsfrequenz ergibt sich als

$$\omega^2 = (3/2)m^{2/3}\,g^{4/3}\,L_z^{-2/3} \ .$$

In unserem Fall $L_z = m(z_0 + \Delta z)v_0 \approx mz_0v_0 = mv_0^3/g$. Wir erhalten

$$\omega^2 = (3/2)g^2/v_0^2 \ .$$

2. Variante: Das effektive Potential wird direkt geschrieben analog zum Keppler problem:

$$V_{\text{eff}}(r) = mgr + \frac{L_z^2}{2mr^2} \ .$$

Die gesamte Energie lautet

$$E = 2\,\frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) \ .$$

Der Koeffizient 2 bei der kinetischen Energie erklärt sich dadurch, dass die radiale Geschwindigkeit $\sqrt{2}\,\dot{r}$ beträgt. Weiter analog zur **1. Variante**.

Hinweise: Aufgabe a) lässt sich einfach durch die Bilanz der Kräfte lösen. Dann kann man b) mit Hilfe der Bewegungsgleichungen lösen. Die Polar-Koordinaten (Kugel-Koordinaten) könnten praktisch sein. Alternativ lassen sich a) und b) lösen in dem man das Problem ähnlich zum Keppler-Problem beschreibt. Betrachten Sie die erhaltene Drehimpulskomponente und führen Sie das efffektive Potential ein.

Bonusfrage (5 Punkte). *Warum fällt die Münze immer durch das Loch im Spendentrichter?*

Reibung.