Klassischen Theoretischen Physik I WS 19/20

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny

2. Klausur
Lösungsvorschlag

---

1. Konservative Kräfte: (15 Punkte)

(a) *(5 Punkte) Betrachten Sie das Kraftfeld*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \left(\alpha y^2 z^3 - 6\beta x z^2, \;\; 2\alpha x y z^3, \;\; 3\alpha x y^2 z^2 - 6\beta x^2 z\right)$$

in drei Dimensionen (α und β - reelle Konstanten). Ist das Kraftfeld konservativ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

Die Kraft ist konservativ wenn

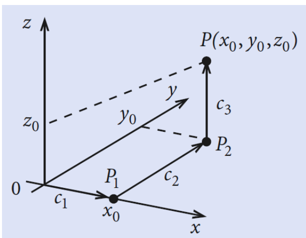
$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0 \; .$$

Es folgt

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\alpha x y z^2 - 6\alpha x y z^2 \\ 3\alpha y^2 z^2 - 12\beta x z - (3\alpha y^2 z^2 - 12\beta x z) \\ 2\alpha y z^3 - 2\alpha y z^3 \end{pmatrix} = 0 \; .$$

Antwort: Die Kraft ist konservativ.

(b) (10 Punkte)



Ein Massenpunkt werde in dem obigen Kraftfeld $\boldsymbol{F}$ längs des Weges

$$0 \xrightarrow{c_1} P_1 \xrightarrow{c_2} P_2 \xrightarrow{c_3} P,$$

d.h. also stückweise längs oder parallel zu den Koordinatenachsen, vom Ursprung 0 zum Raumpunkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ verschoben (siehe Abbildung). Berechnen Sie die beim Verschieben von 0 nach P an dem Körper geleistete Arbeit.

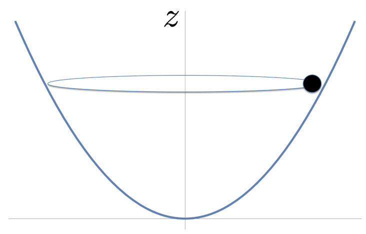
Lösung

$W_{c_1} = 0$ denn $F_x = 0$ entlang c_1; $W_{c_2} = 0$ denn $F_y = 0$ entlang c_2.

$$W_{c_3} = -\int_0^{z_0} dz F_z(x_0, y_0, z) = -(\alpha x_0 y_0^2 z_0^3 - 3\beta x_0^2 z_0^2)$$

2. Massenpunkt in einer Schüssel: (15 Punkte)

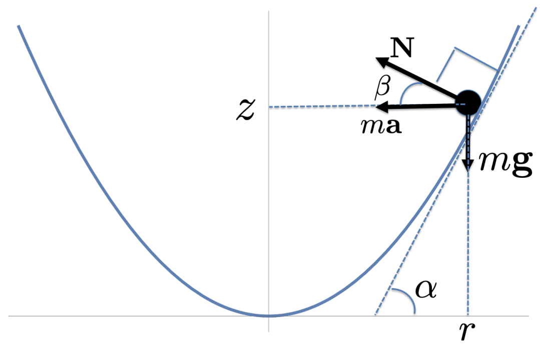
Ein Massenpunkt der Masse m befindet sich auf der inneren reibungslosen Oberfläche einer unendlich hohen, parabolischen Schüssel. Die Schüssel ist beschrieben durch $z = b(x^2 + y^2)/2$ ($b > 0$). Auf den Massenpunkt wirkt die übliche Gravitationskraft.



Die Anfangsgeschwindigkeit mit Betrag v_0 ist horizontal ausgerichtet. Wie muss man die Anfangshöhe $z_0(v_0)$ wählen, sodass die Höhe konstant bleibt, $z(t) = z_0$.

Hinweise: Die Aufgabe lässt sich einfach durch die Bilanz der Kräfte lösen. Alternativ kann man das Problem ähnlich zum Keppler-Problem beschreiben. Betrachten Sie die erhaltene Drehimpulskomponente und führen Sie das efffektive Potential ein.

Lösung, Variante 1:



Wenn die Höhe konstant bleibt, ist die Beschleunigung **a** horizontal ausgerichtet und beträgt $|\mathbf{a}| = r\omega^2 = v^2/r$. Hier $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\mathbf{a} = \mathbf{N} + m\mathbf{g}$$

Hier **N** ist die Reaktionskraft die senkrecht zur Oberfläche ist (senkrecht zur Tangente). Die Tangente macht Winkel α mit der x-Axe (r-Axe).

Für die x-Komponente (genaue r-Komponente) bekommt man mit $\beta = \pi/2 - \alpha$

$$mv^2/r = N\cos\beta = N\sin\alpha$$

Für die z-Komponente bekommt man

$$N\cos\alpha - mg = 0$$

Die Größe N lässt sich ausschliessen:

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{gr}$$

Schließlich, $\tan\alpha$ lässt sich aus der Parabel-Gleichung, $z = br^2/2$, finden:

$$\tan\alpha = \frac{dz}{dr} = br$$

Wir finden daher den Radius

$$r_0^2 = \frac{v^2}{bg}$$

Schließlich

$$z_0 = \frac{br_0^2}{2} = \frac{v^2}{2g} \ .$$

Lösung, Variante 2:

Die z-Komponente des Drehimpulses ist erhalten. Das effektive Potential lautet

$$V_{\text{eff}} = V + \frac{L_z^2}{2mr^2} = mgz + \frac{L_z^2}{2mr^2} = \frac{mgbr^2}{2} + \frac{L_z^2}{2mr^2} \ .$$

Um ein konstantes r (und daher z) zu haben müssen wir im minimum von V_{eff} sein:

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = mgbr - \frac{L_z^2}{mr^3} = 0$$

Dies ergibt

$$gbr^4 = \frac{L_z^2}{m^2}$$

Mit $L_z = mrv_0$ erhalten wir wieder

$$gbr_0^2 = v_0^2 \quad \to \quad z_0 = \frac{v_0^2}{2g} \ .$$

3. Anharmonische Schwingungen: (20 Punkte + 15 **Bonuspunkte**) *Die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes lautet $m\ddot{x} = -m\left(\omega_0^2 x + \epsilon x^3\right)$. Die Konstante ϵ ist positiv.*

(a) *(10 Punkte) Bestimmen Sie das entsprechende Potential $V(x)$ und zeigen Sie, dass für eine beliebige Gesamtenergie $E > \min[V(x)]$ die Flugbahn $x(t)$ symmetrische Schwingungen um $x = 0$ beschreibt. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen E und der Schwingungsamplitude A her.*

Lösung: Es gilt $m\ddot{x} = F = -\partial V/\partial x$. Also $\partial V/\partial x = m\left(\omega_0^2 x + \epsilon x^3\right)$ und

$$V(x) = \int dx\, m\left(\omega_0^2 x + \epsilon x^3\right) = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + \frac{m\epsilon x^4}{4} + C \ ,$$

wobei C eine Konstante ist. Wir können $C = 0$ wählen. Die Gesamtenergie beträgt

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + \frac{m\epsilon x^4}{4}$$

Das Potenzial $V(x)$ ist symmetrisch um $x = 0$. Die Wendepunkte (wo $\dot{x} = 0$) sind $x = \pm A$, wobei gilt

$$E = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} + \frac{m\epsilon A^4}{4}$$

Also die Flugbahn oszilliert zwischen $x = -A$ und $x = A$.

(b) *(10 Punkte) Wie berechnet man die Schwingungsperiode T als Funktion der Schwingungsamplitude A? Die Antwort soll als Integral über x angegeben werden. Hinweis: Denken Sie an Separation der Variablen.*

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = E - V$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

Die Flugzeit zwischen $-A$ und A (eine halbe Periode) ergibt sich als

$$\frac{T}{2} = \int_{-A}^{A} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}}$$

$$\frac{T}{2} = \int_{-A}^{A} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{m\omega_0^2}{2}(A^2 - x^2) + \frac{m\epsilon}{4}(A^4 - x^4)\right]}}$$

$$\frac{T}{2} = \int_{-A}^{A} dx \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2(A^2 - x^2) + \frac{\epsilon}{2}(A^4 - x^4)}}$$

(c) *(15* **Bonuspunkte***) Bestimmen Sie die Schwingungsperiode näherungsweise bis zu Termen linear in ϵ für den Fall $\epsilon A^2 \ll \omega_0^2$. Hinweis: Die folgenden Integrale könnten hier nützlich sein: $\int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pi$ und $\int_{-1}^{1} \frac{y^2 dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pi/2$.*

Wir führen $y = x/A$ ein. Dann

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\omega_0} \int_{-1}^{1} dy \frac{1}{\sqrt{(1 - y^2) + \frac{\epsilon A^2}{2\omega_0^2}(1 - y^4)}}$$

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\omega_0} \int_{-1}^{1} dy \frac{1}{\sqrt{(1 - y^2)\left[1 + \frac{\epsilon A^2}{2\omega_0^2}(1 + y^2)\right]}}$$

Jetzt dürfen wir entwickeln, denn $\epsilon A^2 \ll \omega_0^2$ und $y^2 \leq 1$:

$$\frac{T}{2} \approx \frac{1}{\omega_0} \int_{-1}^{1} dy \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \left[1 - \frac{\epsilon A^2}{4\omega_0^2}(1 + y^2)\right]$$

$$\frac{T}{2} \approx \frac{\pi}{\omega_0} - \frac{\epsilon A^2}{4\omega_0^3} \cdot \frac{3\pi}{2}$$

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0} - \frac{3\pi\epsilon A^2}{4\omega_0^3} = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 - \frac{3\epsilon A^2}{8\omega_0^2}\right)$$

4. Dissipative Dynamik: (25 Punkte)

Ein Massenteilchen m bewegt sich in 3 Dimensionen aufgrund der Kraft

$$\boldsymbol{F} = -m\alpha\boldsymbol{r} - 2m\gamma\boldsymbol{v},$$

wobei $\boldsymbol{v} \equiv d\boldsymbol{r}/dt$, $\alpha > 0$ und $\gamma > 0$ positive Konstanten sind ($\gamma < \sqrt{\alpha}$) und $\boldsymbol{r}$ der Radiusvektor des Teilchens relativ zum Koordinatenursprung ist. Finden Sie die Flugbahn seiner Bewegung, d.h. $\boldsymbol{r}(t)$, wenn im Anfangsmoment

$$\boldsymbol{r}(t=0) = r_0\boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{v}(t=0) = v_0\boldsymbol{e}_y,$$

wobei $\boldsymbol{e}_x$ und $\boldsymbol{e}_y$ die Einheitsvektoren der x- und y- Achsen sind. Skizzieren Sie die Flugbahn qualitativ für $\gamma \ll \sqrt{\alpha}$. Hinweis: die Kartesischen Koordinaten könnten für diese Aufgabe praktischer sein.

Wir schreiben die Bewegungsgleichung für die 3 Komponenten

$$\begin{aligned} m\ddot{x} = &\ -m\alpha x - 2m\gamma\dot{x} \\ m\ddot{y} = &\ -m\alpha y - 2m\gamma\dot{y} \\ m\ddot{z} = &\ -m\alpha z - 2m\gamma\dot{z} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \ddot{x} = &\ -\alpha x - 2\gamma\dot{x} \\ \ddot{y} = &\ -\alpha y - 2\gamma\dot{y} \\ \ddot{z} = &\ -\alpha z - 2\gamma\dot{z} \end{aligned}$$

Der Ansatz $x(t) \propto e^{\lambda t}$ ergibt die quadratische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \alpha = 0$$

Die Lösungen lauten

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \alpha}$$

Denn $\gamma < \sqrt{\alpha}$ erhalten wir

$$\lambda_{1/2} = \pm i\Omega - \gamma \ ,$$

wobei $\Omega \equiv \sqrt{\alpha - \gamma^2}$.

Wir schreiben nun die allgemeine Lösung für $x(t)$:

$$x(t) = A_x e^{\lambda_1 t} + B_x e^{\lambda_2 t}$$

Die Anfangsbedingungen sind $x(t=0) = r_0$, $\dot{x}(t=0) = 0$. Daher $A_x + B_x = r_0$ und

$$0 = \lambda_1 A_x + \lambda_2 B_x = -\gamma(A_x + B_x) + i\Omega(A_x - B_x)$$

Wir erhalten

$$A_x + B_x = r_0$$
$$A_x - B_x = \frac{\gamma}{i\Omega}(A_x + B_x) = \frac{\gamma r_0}{i\Omega}$$

Also

$$A_x = \frac{r_0}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{i\Omega}\right) \quad , \quad B_x = \frac{r_0}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{i\Omega}\right)$$

Die Lösung lautet

$$x(t) = \frac{r_0}{2}\left(1+\frac{\gamma}{i\Omega}\right)e^{-\lambda t+i\Omega t} + \frac{r_0}{2}\left(1-\frac{\gamma}{i\Omega}\right)e^{-\lambda t-i\Omega t} = r_0 e^{-\gamma t}\left[\cos\Omega t + \frac{\gamma}{\Omega}\sin\Omega t\right]$$

Für $y(t)$ haben wir

$$y(t) = A_y e^{\lambda_1 t} + B_y e^{\lambda_2 t}$$

Die Anfangsbedingungen sind $y(t=0)=0$, $\dot{y}(t=0)=v_0$. Daher $A_y+B_y=0$ und

$$v_0 = \lambda_1 A_y + \lambda_2 B_y = -\gamma(A_y+B_y) + i\Omega(A_y - B_y)$$

Das ergibt

$$A_y = -B_y = \frac{v_0}{2i\Omega}$$

Die Lösung lautet

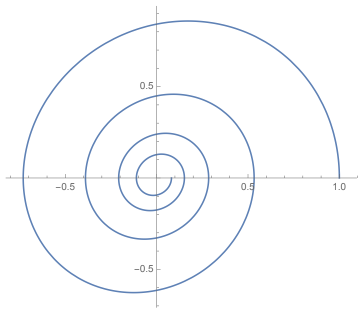
$$y(t) = \frac{v_0}{2i\Omega}e^{-\lambda t+i\Omega t} - \frac{v_0}{2i\Omega}e^{-\lambda t-i\Omega t} = \frac{v_0}{\Omega}e^{-\gamma t}\sin\Omega t$$

Schließlich, für $z(t)$ haben wir

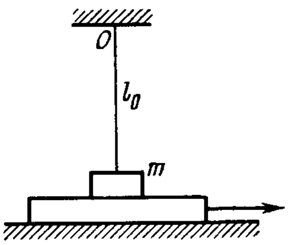
$$z(t) = A_z e^{\lambda_1 t} + B_z e^{\lambda_2 t}$$

Die Anfangsbedingungen sind $z(t=0)=0$, $\dot{z}(t=0)=0$. Daher $A_z=B_z=0$ und die Lösung lautet $z=0$.

Die Flügbahn liegt in der $z=0$ Ebene und sieht wie in der Abbilldung aus:



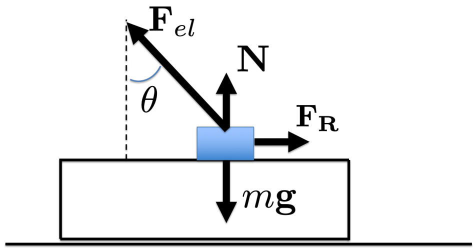
5. Haftreibung, Arbeit und Energieerhaltung: (25 Punkte) *Auf einer horizontalen Ebene liegt ein Brett, auf dem sich ein Stab der Masse m befindet. Der Stab ist zusätzlich mit einer leichten, ungedehnten Feder der Länge l_0 am Punkt O befestigt (siehe Abbildung). Der Reibungskoeffizient (Haftreibung) zwischen dem Stab und dem Brett ist gleich μ.*



Das Brett wird langsam so lange nach rechts geschoben, bis der Stab auf dem Brett zu gleiten beginnt. Dies geschieht in dem Moment, in dem die Feder um einen Winkel θ von der Vertikalen abweicht ($0 < \theta < \pi/2$). Ermitteln Sie die Federkonstante (als Funktion der Parameter μ, l_0, θ, m und Gravitationskonstante g) und die Arbeit, die bis zu diesem Moment durch die auf den Stab wirkende Reibungskraft geleistet wurde. Hinweis: Benutzen Sie den Energieerhaltungssatz.

Lösung:

Wir betrachten die Situation im Moment in dem das Gleiten begint (siehe Abbildung).



Zu diesem Moment ist die Reibungskraft $\mathbf{F_R}$ maximal und ist daher gegeben durch

$$F_R = \mu N$$

Aus Bilanz der Kräfte erhalten wir für die z-Komponente

$$F_{\text{el}} \cos\theta + N = mg$$

und für die x-Komponente

$$F_R = F_{\text{el}} \sin\theta \quad \to \quad \mu N = F_{\text{el}} \sin\theta$$

Wir schließen N aus:

$$\mu(mg - F_{\text{el}} \cos\theta) = F_{\text{el}} \sin\theta$$

Daraus folgt

$$F_{\text{el}} = \frac{\mu mg}{\sin\theta + \mu\cos\theta}$$

Anderseits die elastische Kraft ist gegeben durch

$$F_{\text{el}} = k(l - l_0) = kl_0 \left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right) = \frac{kl_0(1 - \cos\theta)}{\cos\theta}$$

Wir erhalten daher

$$k = \frac{\mu mg}{l_0} \frac{\cos\theta}{(\sin\theta + \mu\cos\theta)(1 - \cos\theta)}$$

Aus Energieerhaltung folgt: die geleistete Arbeit ist gleich der Änderung der elastischen Energie

$$W = \frac{k(l - l_0)^2}{2} = \frac{kl_0^2}{2} \left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)^2 = \frac{kl_0^2}{2} \frac{(1 - \cos\theta)^2}{\cos^2\theta}$$

Schließlich

$$W = \frac{\mu mgl_0}{2} \frac{(1 - \cos\theta)}{(\sin\theta + \mu\cos\theta)\cos\theta}$$