Wintersemester 2021/22
Theorie A - Musterlösung Klausur 2

5.4.2022

Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. M. Kerner

Aufgabe 1: Warm-up

15P

Beantworten Sie die folgenden Fragen in wenigen Sätzen und Formeln.

(a) 1P Was besagt das dritte Newtonsche Axiom?

(b) 2P Leiten Sie die Beziehung $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ zwischen Drehimpuls $\vec{L}$ und Drehmoment $\vec{M}$ eines Körpers der Masse m her.

(c) 2P Zeigen Sie die trigonometrische Identität
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

(d) 1P Zeigen Sie, dass $\vec{a}(t) \perp \dot{\vec{a}}(t)$ falls der Betrag $|\vec{a}(t)|$ nicht von der Zeit abhängt.

(e) 2P Schreiben Sie den folgenden Ausdruck in Vektornotation:
$a_i b_j c_k (\vec{e}_j\, \delta_{ik} + \vec{e}_l\, \epsilon_{lkm} \epsilon_{mij})$

(f) 1P Berechnen Sie für die Funktion $f(a(t), \omega, t) = a(t)\sin(\omega t)$ die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial a}$ und $\frac{d}{dt}$. Hierbei sei ω konstant und $a(t)$ eine (differenzierbare) Funktion von t.

(g) 2P Zeigen Sie, dass für ein konservatives Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ gilt: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.

(h) 2P Bestimmen Sie die Jacobi-Determinante für die Transformation von kartesischen zu Polarkoordinaten und berechnen Sie damit die Fläche eines Kreises mit Radius R.

(i) 2P Ein harmonischer Oszillator werde durch eine äußere Kraft $f(t)$ angetrieben, die durch ihre Fouriertransformierte $\tilde{f}$ festgelegt ist, es gilt also

$$\ddot{x}(t) + \rho\dot{x} + \omega_0^2 x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(\Omega) e^{i\Omega t}.$$

Eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung lässt sich über einen Fourieransatz $x_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{x}(\Omega) e^{i\Omega t}$ finden.
Bestimmen Sie die hierin auftretenden Amplituden $\tilde{x}(\Omega)$.

Lösung der Aufgabe 1

(a) Übt ein Körper 1 auf einen anderen Körper 2 eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegen gesetzt gerichtete Kraft von Körper 2 auf Körper 1 (reactio). $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

(b) $\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = m\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$

(c) $2\sin(x)\cos(x) = 2\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right) = \sin(2x)$

(d) Wenn der Betrag $|\vec{a}|$ konstant ist, gilt

$$0 = \frac{d}{dt}|\vec{a}| = \frac{d}{dt}\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}}{\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}}.$$

Hieraus folgt $\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}} = 0$ und somit $\vec{a} \perp \dot{\vec{a}}$.

(e) $\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$

(f) Die Ableitungen sind:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a\omega \cos(\omega t),$$
$$\frac{\partial f}{\partial a} = \sin(\omega t),$$
$$\frac{df}{dt} = \dot{a} \sin(\omega t) + a\omega \cos(\omega t).$$

(g) Ein konservatives Kraftfeld lässt sich als Gradient eines Potentials schreiben: $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$. Wenden wir hierauf die Rotation an, erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} V) = -\vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k V = 0,$$

da die partiellen Ableitungen vertauschen, und ϵ_{ijk} antisymmetrisch in j, k ist. Alternativ kann man dies auch komponentenweise zeigen:

$$\vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} V) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_x V \\ \partial_y V \\ \partial_z V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y \partial_z V - \partial_z \partial_y V \\ \partial_z \partial_x V - \partial_x \partial_z V \\ \partial_x \partial_y V - \partial_y \partial_x V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(h) Die Transformation zwischen kartesischen und Polarkoordinaten ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi-Determinante ist dann

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r.$$

Das Flächenelement ist somit $dA = dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$, und wir erhalten die Kreisfläche:

$$A = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, r = \frac{1}{2} R^2 \cdot 2\pi = \pi R^2.$$

(i) Wir berechnen zunächst die Ableitungen des Lösungsansatzes

$$\dot{x}_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{x}(\Omega) i\Omega e^{i\Omega t},$$
$$\ddot{x}_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{x}(\Omega)(-\Omega^2) e^{i\Omega t}.$$

Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein und bringen alle Terme auf eine Seite, erhalten wir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi}} e^{i\Omega t} \left[(-\Omega^2 + i\gamma\Omega + \omega_0^2)\tilde{x}(\Omega) - \tilde{f}(\Omega)\right] = 0$$

Eine partikuläre Lösung der DGL ist somit durch die Fourieramplituden

$$\tilde{x}(\Omega) = \frac{\tilde{f}(\Omega)}{-\Omega^2 + i\gamma\Omega + \omega_0^2}$$

gegeben.

Aufgabe 2: Kraftfelder $\boxed{\textbf{7P}}$

Betrachten Sie die beiden Kraftfelder

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 2x\cos^2(y) \\ -(x^2+1)\sin(2y) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ z^{5/2} \end{pmatrix}.$$

(a) $\boxed{4\text{P}}$ Bestimmen Sie, ob die Kraftfelder konservativ sind und geben Sie wenn möglich jeweils ein Potential $V(\vec{r})$ an, so dass $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$.

(b) $\boxed{3\text{P}}$ Berechnen Sie für die beiden Kraftfelder die Arbeit, die bei einer Bewegung entlang der Bahnkurve $\vec{r}(t) = (\cos t,\, 2\sin t,\, t)^T$ verrichtet wird, wobei der Parameter t das Intervall $t \in [0, 2\pi]$ durchlaufe.

Lösung der Aufgabe 2

(a) Wir berechnen zunächst die Rotation der beiden Kraftfelder:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2x\cos^2(y) \\ -(x^2+1)\sin(2y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ -2x\sin(2y) + 4x\cdot\cos(y)\sin(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ z^{5/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass $\vec{F}_2$ nicht konservativ ist.
Bei Vektorfeld $\vec{F}_1$ verschwindet die Rotation, wobei wir benutzt haben, dass $\sin(2y) = 2\sin(y)\cos(y)$ (siehe Formelsammlung/Aufgabe 1c). Das Vektorfeld kann also konservativ sein und wir versuchen ein zugehöriges Potential zu bestimmen. Da $\vec{F}_1$ nicht von z abhängt, muss auch das Potential unabhängig von dieser Koordinate sein. Aus der x-Komponente der Kraft folgt

$$F_{1,x} = 2x\cos^2(y) = -\partial_x V(x,y) \quad \rightarrow \quad V(x,y) = -x^2\cos^2(y) + V(y).$$

Aus der y-Komponente erhalten wir dann

$$\begin{aligned} F_{1,y} &= -\partial_y V(x,y) \\ \rightarrow \quad -(x^2+1)2\sin(y)\cos(y) &= -2x^2\cos(y)\sin(y) - V'(y) \\ \rightarrow \quad V'(y) &= 2\sin(y)\cos(y) \\ \rightarrow \quad V(y) &= \sin^2(y) + c = -\cos^2(y) + c', \end{aligned}$$

wobei $V(y)$ entweder durch $\sin y$ oder $\cos y$ ausgedrückt werden kann und die zugehörigen Integrationskonstanten beliebig gewählt werden können. Wir setzen $c' = 0$ und schreiben das Potential als

$$V(\vec{r}) = V(x,y) = -x^2\cos^2(y) + V(y) = -(x^2+1)\cos^2(y)$$

(b) Da das Vektorfeld $\vec{F}_1$ konservativ ist, erhalten wir die geleistete Arbeit aus der Potentialdifferenz der beiden Endpunkte $\vec{r}_1 = \vec{r}(0) = (1,0,0)^T$ und $\vec{r}_2 = \vec{r}(2\pi) = (1,0,2\pi)^T$:

$$W = V(\vec{r_1}) - V(\vec{r_2}) = 0$$

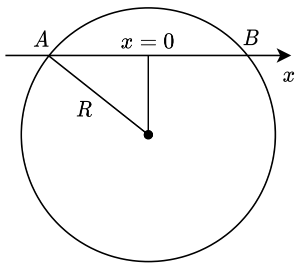
Für das 2. Kraftfeld erhalten wir die Arbeit aus dem Wegintegral:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\cos t \\ t^{5/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2\cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2\sin^2 t + 4\cos^2 t + t^{5/2})\, dt = 2\pi + \frac{2}{7}(2\pi)^{7/2} \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Tunnel durch Erde — 5P

Ein Wagen der Masse m rolle unter Einfluss der Schwerkraft duch einen geraden, durch die Erde verlaufenden Tunnel, der die Punkte A und B entlang der x-Achse verbindet. Unter der Annahme, dass die Massendichte der Erde im Innern konstant ist, ergibt sich die Gravitationsbeschleunigung in Abhängigkeit von der Entfernung zum Erdmittelpunkt r innerhalb der Erde zu

$$g(r) = g_0 \frac{r}{R},$$



mit dem Erdradius R und der Erdbeschleunigung g_0 an der Oberfläche.

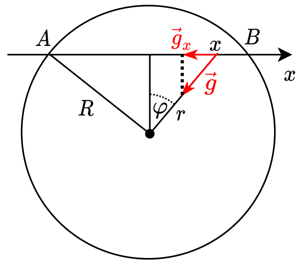
(a) $\boxed{3P}$ Stellen Sie zunächst für den Fall verschwindender Reibung die Bewegungsgleichung auf und zeigen Sie, dass dies zu harmonischen Schwingungen führt. Bestimmen Sie die Zeit t_B, die der Wagen für die Fahrt von A nach B benötigt.

(b) $\boxed{2P}$ Es wirke nun zusätzlich eine Reibungskraft $F_R = -m\rho\dot{x}$ mit $\rho \gg 1/t_B$. Geben Sie die Bewegungsgleichung, sowie deren allgemeine Lösung an. Wie erhält man hieraus die Lösung für den Fall, dass der Wagen zum Zeitpunkt $t = 0$ am Punkt A losrollt? *Anmerkung:* Das hierbei auftretende Gleichungssystem muss nicht gelöst werden.

Lösung der Aufgabe 3

(a) Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, gilt für die Komponente der Erdbeschleunigung in Tunnelrichtung:

$$\frac{-g_x}{g} = \frac{x}{r} = \sin\varphi \quad \rightarrow \quad g_x = -g(r)\frac{x}{r} = -g_0\frac{r}{R}\frac{x}{r} = -g_0\frac{x}{R}$$



Wir erhalten also die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) = -\frac{g_0}{R}x(t) \quad \rightarrow \quad \ddot{x}(t) + \frac{g_0}{R}x(t) = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines harmonischen Oszillators mit Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$. Die Dauer der Fahrt t_B von A nach B ist die Hälfte der Schwingungsdauer, also

$$t_B = T/2 = \frac{2\pi}{\omega}\frac{1}{2} = \pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}.$$

(b) Mit dem zusätzlichen Reibungsterm lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -\frac{mg_0}{R}x - m\rho\dot{x}, \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} + \rho\dot{x} + \frac{g_0}{R}x = 0.$$

Die Lösung der Bewegungsgleichung für starke Dämpfung ($\rho \gg 1/t_B = \omega/\pi$) lautet

$$x(t) = Ae^{\left(-\rho/2+\sqrt{\frac{\rho^2}{4}-\frac{g_0}{R}}\right)} + Be^{\left(-\rho/2-\sqrt{\frac{\rho^2}{4}-\frac{g_0}{R}}\right)}$$

Die Lösung für den Fall, dass der Wagen zur Zeit $t = 0$ am Punkt A losrollt, ist durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$x(0) = A + B = x_A$$

$$\dot{x}(0) = A\left(-\rho/2 + \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \frac{g_0}{R}}\right) + B\left(-\rho/2 - \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \frac{g_0}{R}}\right) = 0$$

Dies ist ein Gleichungssystem, das sich nach den zwei Variablen A und B auflösen lässt.

Aufgabe 4: Ballwurf über Karussell $\boxed{\text{7P}}$

Sie sitzen in der Mitte eines Karussells und beobachten, wie über Sie ein Ball geworfen wird. Von außen betrachtet (also vom Inertialsystem aus) wird die Flugbahn des Balls durch die Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \left(vt,\, 0,\, -\frac{1}{2}gt^2\right)^T$$

beschrieben. Das Karussell rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die nach oben gerichtete z-Achse.

(a) $\boxed{\text{2P}}$ Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}\,'(t)$ des Balls in dem mit dem Karussell mitbewegten Koordinatensystem. *Anmerkungen:* Zum Zeitpunkt $t = 0$ gelte $\vec{e}_i = \vec{e}_i\,'$ für die Koordinatenachsen der beiden Bezugssysteme. Handelt es sich hierbei um eine aktive oder passive Drehung?

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Im Inertialsystem lautet die Bewegungsgleichung des Balls offensichtlich $m\ddot{\vec{r}} = -mg\vec{e}_z = \vec{F}_G$, wobei m die Masse des Balls ist. Wie lautet die Bewegungsgleichung im mitbewegten Bezugssystem?
Vereinfachen Sie die auftretenden Kreuzprodukte so weit wie möglich. Drücken Sie hierzu alle Vektoren in Komponentenschreibweise aus, setzen Sie jedoch zunächst nur $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ explizit ein.

(c) $\boxed{\text{3P}}$ Berechnen Sie nun die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}'$ und Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}'$ im mitbewegten Bezugssystem und überprüfen Sie hiermit, dass die im vorigen Aufgabenteil bestimmte Bewegungsgleichung erfüllt ist.

Lösung der Aufgabe 4

(a) Die Transformation vom Inertialsystem ins Bezugssystem Karussell ist durch die Rotationsmatrix $R_z^T(\omega t)$ gegeben, da es sich bei dieser Transformation um eine Koordinatentransformation, also eine passive Rotation handelt. Die Bahnkurve im mitrotierten System ist somit:

$$\vec{r}\,'(t) = R^T(\omega t)\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vt \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vt\cos\omega t \\ -vt\sin\omega t \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}.$$

(b) Im mitbewegten System treten zusätzlich Coriolis- und Zentrifugalkraft auf:

$$\begin{aligned}
m\ddot{\vec{r}}\,'(t) &= \vec{F}_G' + \vec{F}_C + \vec{F}_Z \\
&= \vec{F}_G - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\,'(t) - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') \\
&= m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - 2m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x' \\ v_y' \\ v_z' \end{pmatrix} - m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_x' \\ r_y' \\ r_z' \end{pmatrix}\right] \\
&= m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - 2m\omega\begin{pmatrix} -v_y' \\ v_x' \\ 0 \end{pmatrix} - m\omega\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r_y' \\ r_x' \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - 2m\omega\begin{pmatrix} -v_y' \\ v_x' \\ 0 \end{pmatrix} - m\omega^2\begin{pmatrix} -r_x' \\ -r_y' \\ 0 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 2\omega v_y' + \omega^2 r_x' \\ -2\omega v_x' + \omega^2 r_y' \\ -g \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) Wir berechnen nun die Geschwindigkeit und Beschleunigung im rotierenden Koordinatensystem:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}\,'(t) &= \begin{pmatrix} v\cos(\omega t) - v\omega t\sin(\omega t) \\ -v\sin(\omega t) - v\omega t\cos(\omega t) \\ -gt \end{pmatrix} \\
\ddot{\vec{r}}\,'(t) &= \begin{pmatrix} -2v\omega\sin(\omega t) - v\omega^2 t\cos(\omega t) \\ -2v\omega\cos(\omega t) + v\omega^2 t\sin(\omega t) \\ -g \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Bewegungsgleichung aus der vorigen Teilaufgabe ein, sehen wir, dass diese erfüllt ist. Z.B. für die x-Komponente erhalten wir auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung:

$$2\omega v_y' + \omega^2 r_x' = 2\omega\left(-v\sin(\omega t) - v\omega t\cos(\omega t)\right) + \omega^2 vt\cos(\omega t) = -2\omega v\sin(\omega t) - \omega^2 vt\cos(\omega t),$$

was dem Ausdruck für die x-Komponente der Beschleunigung entspricht.

Aufgabe 5: Fall mit Newtonscher Reibung $\boxed{\textbf{6P}}$

Ein Körper der Masse m falle im Schwerefeld der Erde unter Einfluss Newton'scher Reibung. Die Bewegungsgleichung ist somit

$$m\ddot{z}(t) = -mg + k\dot{z}^2(t),$$

wobei die Erdbeschleunigung g und der Reibungskoeffizient k konstant und positiv sind. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei $z(0) = \dot{z}(0) = 0$.

(a) $\boxed{\text{3P}}$ Da die Differentialgleichung nur von Ableitungen von $z(t)$ abhängt, lässt sich diese auch als Differentialgleichung für die Geschwindigkeit $v(t) = \dot{z}(t)$ schreiben. Bestimmen Sie die Lösung $v(t)$ dieser Differentialgleichung durch Separation der Variablen.
Ergebnis zum Weiterrechnen: $v(t) = -\sqrt{\frac{gm}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right)$.

(b) $\boxed{\text{1P}}$ Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, die im Grenzfall $t \to \infty$ erreicht wird.

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Bestimmen Sie nun $z(t)$ durch Integration von $v(t)$.
Hinweise: Ersetzten Sie $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ und machen Sie eine geeignete Substitution. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$.

Lösung der Aufgabe 5

(a) Ausgedrückt durch die Geschwindigkeit lautet die DGL

$$m\dot{v}(t) = -mg + kv^2(t).$$

Diese DGL lässt sich durch Separation Der Variablen lösen. Hierzu 'separieren' wir t und z

$$\frac{m\,dv}{-mg + kv^2} = dt$$

und integrieren

$$t = \int_0^t dt = \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{m\,dv}{-mg + kv^2} = -\frac{1}{g}\int_0^{v(t)} \frac{1}{1 - \frac{k}{mg}v^2}\,dv$$

Wir wollen nun $\frac{k}{mg}v^2$ durch x^2 ersetzen, substituieren also $x = \sqrt{\frac{k}{mg}}v$, $dx = \sqrt{\frac{k}{mg}}dv$

$$\to t = -\frac{1}{g}\int_0^{x(v(t))} \sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{1}{1 - x^2}dx = -\sqrt{\frac{m}{gk}}\,\mathrm{artanh}(x)\Big|_0^{x(v(t))} = -\sqrt{\frac{m}{gk}}\,\mathrm{artanh}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v(t)\right).$$

Dies lässt sich nun nach $v(t)$ auflösen:

$$
\begin{aligned}
-\sqrt{\frac{gk}{m}}t &= \operatorname{artanh}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v(t)\right) \\
\rightarrow \tanh\left(-\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right) &= \sqrt{\frac{k}{mg}}v(t) \\
\rightarrow v(t) &= \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(-\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right) = -\sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right)
\end{aligned}
$$

(b) Die Funktion $\tanh(x)$ hat den Grenzwert

$$
\lim_{x\to\infty}\tanh(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1.
$$

Wir erhalten somit

$$
\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} -\sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right) = -\sqrt{\frac{mg}{k}}
$$

(c) Wir bestimmen zunächst die Stammfunktion des tanh durch die Substitution $u = \cosh(x)$, die sich einfach erraten lässt. Mit $\frac{du}{dx} = \sinh(x)$, was man aus der Definition der Hyperbelfunktionen folgt, erhalten wir

$$
\int \tanh(x)\,dx = \int \frac{1}{\cosh(x)}\sinh(x)dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| = \ln|\cosh(x)|.
$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
z(t) = \int_0^t v(t')\,dt' &= \int_0^t -\sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\underbrace{\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t'\right)}_{x}\,dt' \\
&= \int_0^{x(t)} -\sqrt{\frac{mg}{k}}\sqrt{\frac{m}{gk}}\tanh(x)dx \\
&= -\frac{m}{k}\ln\left|\cosh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right)\right|
\end{aligned}
$$

Anmerkung: Aus den Ausdrücken für $z(t)$ und $v(t)$ erhält man den von Übungsblatt 1, Aufgabe 1 bekannten Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Fallweg $v(s) = \sqrt{\frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{2ks}{m}}\right)}$.