Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Klassische Theoretische Physik I, Einführung - Klausur 1, WS 2022/23

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl

Mitchell Whittam, David Dams, Benedikt Zerulla

23.02.2023

Name:

Matrikelnr.:

Vorname:

Studiengang:

Prüfungsordnung:

Wichtige Hinweise:

- Studienausweis bitte sichtbar bereitlegen.
- Diese Blätter mit abgeben.
- Bitte Namen und Matrikelnummer auf jedes Blatt schreiben.
- Bitte für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden.
- Bitte weder rote Stifte noch Bleistifte verwenden.
- Smartphones und andere technische Geräte sind während der Klausur abzuschalten und in Rucksack oder Jacke zu verstauen.
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine
- Um alle Punkte zu bekommen, müssen alle Lösungen so weit wie möglich vereinfacht werden.

Die Klausureinsicht findet am 02.03.23 von 9-12 Uhr in Raum 10.01 statt.
(Siehe Klausurinformation in ILIAS)

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ	Note
Punkte							
von	10	10	10	10	10	100 % = 50	

1. Warm-up [10 Punkte]

(a) [2 Punkte] Nennen Sie jeweils den Namen einer konservativen und einer nicht-konservativen Kraft.

(b) [2 Punkte] Der Ort eines Teilchens mit der Masse m ist zum Zeitpunkt t durch den Vektor

$$\mathbf{r}(t) = t^3\,\hat{\mathbf{e}}_x + \mathrm{e}^{2t}\,\hat{\mathbf{e}}_z$$

gegeben. Bestimmen Sie die auf das Teilchen einwirkende Kraft $\mathbf{F}$ bei $t = 0$.

(c) [2 Punkte] Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} a^2x^2 \\ \ln(y^3) \\ -\cos(az) \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Bestimmen Sie alle Werte von a, sodass $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ bei $\mathbf{r} = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{\pi}{a}\right)^{\mathrm{T}}$ divergenzfrei ist.

(d) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ eines durch eine Zentralkraft beschleunigten Objektes erhalten bleibt.

(e) [2 Punkte] Eine Differentialgleichung sei gegeben durch

$$y\mathrm{e}^{\ln(x)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2, \quad x > 0.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung, die die Anfangsbedingung $\lim_{x\to 0^+} y(x) = 0$ erfüllen. Skizzieren Sie diese Lösungen.

2. 1D Potential [10 Punkte]

Ein Teilchen der Masse m und Gesamtenergie E bewege sich in folgendem 1D Potential, wobei a, b Konstanten seien

$$V(x) = ax^2 + bx^4.$$

(a) [3 Punkte] Skizzieren Sie das Potential für die Fälle

$$\text{i) } a < 0,\ b > 0 \ \text{ und } \ \text{ii) } a > 0,\ b < 0.$$

Berechnen Sie hierfür zuerst die Nullstellen und Extremwerte, damit der Verlauf qualitativ korrekt ist.

(b) [2 Punkte] Geben Sie für die Fälle i) und ii) jeweils die erlaubten Energie- und Ortsbereiche an, in denen das Teilchen gebunden ist und sich also *nicht* bis ins Unendliche bewegen kann.

(c) [2 Punkte] Geben Sie für Fall ii) die Geschwindigkeit eines gebundenen Teilchens in Abhängigkeit seines Ortes an und skizzieren Sie diese. Beachten Sie, dass die Gleichung für die Geschwindigkeit *zwei* Lösungen hat.

(d) [3 Punkte] Berechnen Sie nun für Fall ii) die Lösung $x(t)$ für $a = -2b$ und $E = -b$ zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) > 0$. Sie dürfen annehmen, dass $|x| < 1$.
Hinweis: Hilfreich ist die folgende Identität

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh(x) = 1 - \tanh^2(x)$$

und eine Substitution der Form $\tanh(u) = x$.

2. 1D Potential [10 Punkte]

Ein Teilchen der Masse m und Gesamtenergie E bewege sich in folgendem 1D Potential, wobei a, b Konstanten seien

$$V(x) = ax^2 + bx^4.$$

(a) [3 Punkte] Skizzieren Sie das Potential für die Fälle i) $a < 0, b > 0$ und ii) $a > 0, b < 0$. Berechnen Sie hierfür zuerst die Nullstellen und Extremwerte, damit der Verlauf qualitativ korrekt ist.
LÖSUNG:

(b) [2 Punkte] Geben Sie für die Fälle i) und ii) jeweils die erlaubten Energie- und Ortsbereiche an, in denen das Teilchen gebunden ist und sich also *nicht* bis ins Unendliche bewegen kann. **LÖSUNG:**

(c) [2 Punkte] Geben Sie für Fall ii) die Geschwindigkeit eines gebundenen Teilchens in Abhängigkeit seines Ortes an und skizzieren Sie diese. Beachten Sie, dass die Gleichung für die Geschwindigkeit *zwei* Lösungen hat.
LÖSUNG:

(d) [3 Punkte] Berechnen Sie nun für Fall ii) die Lösung $x(t)$ für $a = -2b$ und $E = -b$ zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) > 0$. Sie dürfen annehmen, dass $|x| < 1$.
Hinweis: Hilfreich ist die folgende Identität

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh(x) = 1 - \tanh^2(x)$$

und eine Substitution der Form $\tanh(u) = x$.

3. Kettenlinie [10 Punkte]

Die Bogenlänge s einer Kurve in der xy-Ebene sei gegeben durch

$$s = \int_a^b |\mathrm{d}\mathbf{r}|, \quad x \in [a, b],$$

wobei $\mathbf{r} = (x, y)^\mathrm{T}$.

(a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass

$$s = \int_a^b \mathrm{d}x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$$

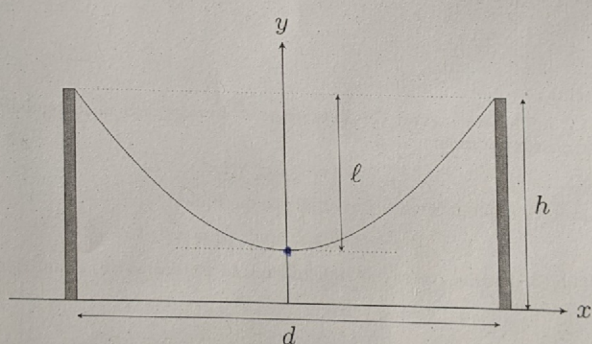
(b) Die natürliche Form einer hängenden Kette ist als Kettenlinie bekannt und wird beschrieben durch die Gleichung

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0,$$

wobei

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Ein physikalisches Beispiel wird in der folgenden Abbildung gezeigt. Sie stellt eine Kettenlinie mit Tiefe ℓ zwischen zwei Säulen dar. Die Säulen haben jeweils eine Höhe h und einen Abstand d voneinander. Die Enden der Kette sind ganz oben an den Säulen befestigt.



(i) [1 Punkt] Welchem Punkt der Kettenlinie entspricht der Parameter a?

(ii) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass die Bogenlänge der in der Abbildung dargestellten Kettenlinie durch

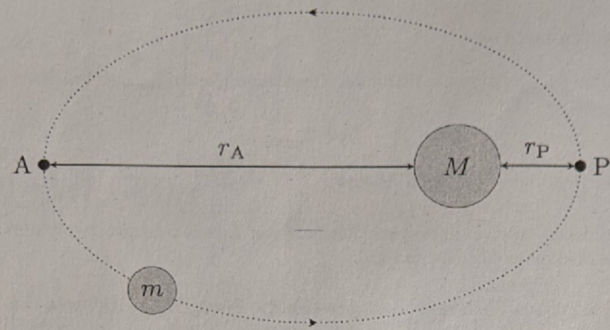
$$s = 2a \sinh\left(\frac{d}{2a}\right)$$

gegeben ist.
Hinweis: Die folgenden Identitäten könnten hilfreich sein: $\mathrm{d}(\cosh x)/\mathrm{d}x = \sinh x$, $\mathrm{d}(\sinh x)/\mathrm{d}x = \cosh x$ *und* $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

(iii) [4 Punkte] Bestimmen Sie den Abstand zwischen den Säulen, sodass die Länge der Kette zweimal so groß wie ihre Tiefe ist.
Hinweis: Seien Sie von der Lösung nicht überrascht!

4. Planetenbahnen [10 Punkte]

Ein Planet mit der Masse m bewege sich auf einer Umlaufbahn um die Sonne mit der Masse M. Der sonnenfernste Punkt (das Aphel) befindet sich bei A und der sonnennächste Punkt (das Perihel) bei P. Beim Aphel (Perihel) hat der Planet eine Entfernung r_A (r_P) zur Sonne.



(a) [1 Punkt] Zeigen Sie mithilfe des Energieerhaltungssatzes, dass

$$\mu\left(\frac{1}{r_\mathrm{A}}-\frac{1}{r_\mathrm{P}}\right)=\frac{1}{2}\left(v_\mathrm{A}^2-v_\mathrm{P}^2\right),$$

wobei v_A und v_P jeweils die Geschwindigkeiten des Planeten beim Aphel und Perihel sind und $\mu = GM$, wobei G die Gravitationskonstante ist.

(b) [1 Punkt] Nutzen Sie die Drehimpulserhaltung, um r_P als Funktion von $r_\mathrm{A}, v_\mathrm{A}$ und v_P zu bestimmen.

(c) [3 Punkte] Zeigen Sie unter der Annahme $r_\mathrm{P} \neq r_\mathrm{A}$ und mithilfe der in a) und b) bestimmten Gleichungen, dass

$$v_\mathrm{P}=\frac{2\mu}{r_\mathrm{A}v_\mathrm{A}}-v_\mathrm{A}.$$

Es sei nun für Teile d) und e) gegeben, dass $r_\mathrm{A} = 2r_\mathrm{P}$.

(d) [2 Punkte] Die Entfernung des Planeten zur Sonne sei gegeben durch

$$r=\frac{K}{1+\epsilon\cos\phi},\quad K=\text{const.},$$

wobei ϵ die Exzentrizität der Umlaufbahn ist und $0 \le \phi < 2\pi$.

Bestimmen Sie ϵ.

(e) [3 Punkte] Die Exzentrizität kann als

$$\epsilon=\sqrt{1+\frac{4EK}{mr_\mathrm{A}v_\mathrm{A}(v_\mathrm{A}+v_\mathrm{P})}}.$$

geschrieben werden, wobei E die Gesamtenergie des Planeten ist.

Zeigen Sie, dass

$$E=-mv_\mathrm{A}^2.$$

5. Wurf mit Luftwiderstand [10 Punkte]

Ein Teilchen mit der Masse m am Ort $\mathbf{r}(t)$ fällt senkrecht nach unten in die $-\hat{\mathbf{e}}_z$ Richtung unter dem Einfluss der Luftwiderstandskraft $\mathbf{F}_\mathrm{L}$, wobei

$$\mathbf{F}_\mathrm{L} = -\gamma\dot{\mathbf{r}}$$

und $\gamma > 0$ eine Konstante sei.

(a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die maximale Geschwindigkeit v_max des Teilchens durch

$$v_\mathrm{max} = \frac{mg}{\gamma}$$

gegeben ist. Begründen Sie Ihren Ansatz.

Das gleiche Teilchen (wieder unter dem Einfluss von Luftwiderstand) wird nun mit dem Anfangswinkel θ in der xz-Ebene geworfen.

(b) [2 Punkte] Schreiben Sie **komponentenweise** die Bewegungsgleichungen des Teilchens auf.

(c) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} = -\frac{g}{v_\mathrm{max}},$$

wobei v_x die x-Komponente der Geschwindigkeit des Teilchens sei.

(d) [3 Punkte] Die Gleichung in Teil (c) kann wie folgt formuliert werden:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{v_\mathrm{max}}x = v_0\cos(\theta),$$

wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens sei.

Indem Sie beide Seiten dieser neuen Gleichung mit dem Faktor

$$I = \exp\left(\frac{g}{v_\mathrm{max}}t\right)$$

multiplizieren und die Anfangsbedingung $x(t=0) = 0$ nutzen, zeigen Sie, dass

$$x(t) = \frac{v_0 v_\mathrm{max}}{g}\cos(\theta)\left[1 - \exp\left(-\frac{g}{v_\mathrm{max}}t\right)\right].$$

Alles Gute für die Klausur! :)